ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2025. Випуск 97. C. 5–42
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2025. Issue 97. P. 5–42
http://publications.lnu.edu.ua/bulletins/index.php/mmf
doi: http://dx.doi.org/10.30970/vmm.2025.97.005-042

УДК 517.5

ОГЛЯД РЕЗУЛЬТАТІВ ТЕОРІЇ ВІМАНА-ВАЛІРОНА ЗА ОСТАННІ 50 РОКІВ. I: НЕРІВНІСТЬ ВІМАНА І СПІВВІДНОШЕННЯ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ВІД ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Олег СКАСКІВ[1], Андрій БАНДУРА[2], Андрій КУРИЛЯК[3]

[1,3] *Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, 79001, Львів*
[2] *Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу Івано-Франківськ, вул. Карпатська 15, 76019, Україна*
e-mails: olskask@gmail.com, andriykopanytsia@gmail.com, andriykuryliak@gmail.com

Статтю присвячено огляду результатів з теорії Вімана-Валірона в класі цілих і аналітичних функцій вигляду $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, що стосуються таких співвідношень

$$\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r), \quad \Psi(\ln M_f(r)) \sim \Psi(\ln \mu_f(r)),$$

а також нерівностей типу Вімана $M_f(r) \leqslant \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/2}$, які виконуються для всіх $r \geqslant r_0$ зовні деяких виняткових множин; тут $M_f(r)$ та $\mu_f(r)$ — максимум модуля f на колі $\{z \colon |z| = r\}$ та максимальний член ряду Тейлора, відповідно. Описуються також твердження, що стосуються узагальнень цих результатів в класах цілих рядів Діріхле вигляду

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \exp\{z\lambda_n\}, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \uparrow +\infty \ (1 \leqslant n \uparrow +\infty).$$

Розглядаються також аналоги подібних результатів в класі функцій $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ вигляду $F(x) = \int_0^{+\infty} f(u) e^{xu} \nu(du)$, де ν — невід'ємна міра на $\mathbb{R}_+$ з необмеженим носієм $\operatorname{supp} \nu$, $f(x)$ — довільна невід'ємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}_+$.

Ключові слова: ціла функція, аналітична функція, теорія Вімана-Валірона, ряд Діріхле, інтеграл Лебега-Стілт'єса.

2020 Mathematics Subject Classification: 30B50, 11F66

1. **Позначення**

- $\mathcal{L}^*$ — клас невід'ємних, неспадних на $[0,+\infty)$ функцій;
- $\mathcal{L}$ — клас додатних неперервних на $[0,+\infty)$ функцій $\psi(t)$ таких, що $\psi(t)\to+\infty$ $(t\to+\infty)$;
- $\mathcal{L}^+$ — підклас $\mathcal{L}$, в який входять зростаючі до $+\infty$ при $x\to+\infty$ функції;
- $\mathcal{L}_1$ — клас функцій $\psi\in\mathcal{L}$ таких, що $\int^{+\infty}\dfrac{dt}{\psi(t)}<+\infty$;
- $\mathcal{W}$ — клас функцій $w\in\mathcal{L}^+$ таких, що
$$\int_1^{+\infty}x^{-2}w(x)dx<+\infty;$$
- $\mathcal{H}_R$ клас неперервних додатних неспадних на $[0;R)$, $R\leqslant+\infty$, функцій таких, що
$$\int_{r_0}^{R}\frac{h(r)}{r}dr=+\infty \text{ для деякого } r_0\in(0,R);$$
- $\mathcal{L}_1^+=\mathcal{L}_1\cap\mathcal{L}^+$;
- $\mathcal{L}_2$ — клас диференційовних вгнутих функцій $\omega\in\mathcal{L}^+$ таких, що
$$\frac{1}{t}=O(\omega'(t))\ (t\to+\infty);$$
- $\mathcal{L}_2^0$ — клас функцій $\omega\in\mathcal{L}_2$ таких, що для кожної функції $\varepsilon(t)\to+0$ $(t\to+\infty)$
$$\omega'(t)\searrow 0\quad(t\to+\infty)\quad \text{і}\quad \varlimsup_{t\to+\infty}\omega'((1-\varepsilon(t))t)/\omega'(t)=1;$$
- $\mathcal{L}_0$ — клас додатних неспадних на $[0,+\infty)$ функцій $V(t)$ таких, що
$$\int_0^{+\infty}\frac{dV(t)}{t}<+\infty;$$
- $\mathcal{E}_R$, $0<R\leqslant+\infty$, — клас необмежених аналітичних функцій в крузі $\mathbb{D}_R=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|<R\}$;
- $M_f(r)=\max\{|f(z)|\colon |z|=r\}$, $m_f(r)=\min\{|f(z)|\colon |z|=r\}$, $\mu_f(r)=\max\{|F_n|r^n\colon n\geqslant 0\}$, $r>0$, $f(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kz^k$;
- $M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|\colon y\in\mathbb{R}\}$, $m(x,F)=\inf\{|F(x+iy)|\colon y\in\mathbb{R}\}$, $\mu_(x,F)=\max\{|F_n|e^{x\lambda_n}\colon n\geqslant 0\}$, $\nu_(x,F)=\max\{n\colon |F_n|e^{x\lambda_n}=\mu_(x,F)\}$, $F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}F_ke^{z\lambda_k}$, $\mathfrak{M}(x,F)=\sum_{k=0}^{+\infty}|F_k|e^{x\lambda_k}$, $x\in\mathbb{R}$, $z=x+iy\in\mathbb{C}$.

2. **Вступ**

Розпочнемо здалека, від витоків. Серед методів, що застосовуються при дослідженні асимптотичних властивостей аналітичних функцій, є так званий метод Вімана-Валірона, в основі якого лежить наступне просте спостереження, зроблене ще на початку XX ст. А. Віманом і Ж. Валіроном ([1–8], див. також [9,10]).

Нехай $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_nz^n$ ціла функція, а ряд $\alpha(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\alpha_nz^n$, $\alpha_n\neq 0$, має скінченний радіус збіжності $R>0$ і такий, що
$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|\alpha_n|}$$

та для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $r \in (0; R)$, для якого

$$|\alpha_n| r^n = \mu_\alpha(r) := \max\{|\alpha_j| r^j : j \geq 0\}.$$

Тоді максимальний член $\mu_f(r)$ переважає кожний інший член степеневого ряду, що зображає цілу функцію f, більше, ніж максимальний член $\mu_\alpha(r)$ у степеневому ряді, що зображає аналітичну функцію α в крузі скінченного радіуса. Точніше, існують $t > 0$ і $r < R$ такі, що для всіх $j \geq 0$

$$|f_j| t^j / \mu_f(t) \leq |\alpha_j| r^j / \mu_\alpha(r). \tag{1}$$

Справді, досить розглянути цілу функцію (ряд порівняння)

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n}{\alpha_n} z^n,$$

скористатись означенням максимального члена $\mu_A(x)$ і прийняти $x = tr$, де $t < R$ таке, що $\nu_\alpha(r) = \nu_A(x)$, а $\nu_f(x) = \max\{n\colon |f_n| x^n = \mu_f(x)\}$ — центральний індекс відповідного степеневого ряду. Фіксуючи тепер вибір аналітичної функції $\alpha(z)$ так, щоб вона збігалася зі своєю мажорантою Ньютона,, отримаємо з (1) оцінки зверху загального члена довільної цілої функції f через максимальний член $\mu_f(t)$. За допомогою такого підходу ще Віман і Валірон виявили, що всі цілі функції мають ряд чудових властивостей, подібних до властивостей многочленів. Зрозуміло, що ця обставина не в останню чергу є джерелом різноманітних застосувань цілих функцій.

Так, наприклад, для многочлена $P(z)$, $\deg P = n$ при $z \to \infty$ правильні асимптотичні рівності

$$P(ze^\tau) \sim e^\tau P(z), \quad P^{(k)}(z) \sim \left(\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{z^k}\right) \cdot P(z),$$

де $1 \leq k < n$, $\tau = \tau(z)$ — довільна обмежена функція. Друге співвідношення при $n \to +\infty$ дає

$$P^{(k)}(z) \sim \left(\frac{n}{z}\right)^k \cdot P(z).$$

Але $\nu_P(|z|) = \deg P = n$ для досить великих $|z|$.

Якщо f — ціла функція, то один з основних висновків теорії Вімана-Валірона, можна описати в наступний спосіб: в околах точок максимуму $|f(z)|$ (тобто при малих $|\eta|$, і z таких, що $|z| = r$ і значення $|f(z)|$ в деякому сенсі близьке до $M_f(r) := \max\{|f(z)| : \ |z| = r\}$) виконуються асимптотичні співвідношення

$$f(ze^\eta) \sim e^{\eta \nu_f(r)} f(z), \qquad \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \sim \left(\frac{\nu_f(r)}{z}\right)^k,$$

при $|z| = r \to +\infty$, $r \notin E$, а E — деяка множина скінченної логарифмічної міри, тобто $\int_{E \cap [1,+\infty)} d\ln r < +\infty$. Відзначимо, що описані щойно співвідношення виявились досить корисними при вивченні асимптотичних властивостей цілих розв'язків диференціальних рівнянь та функціональних рівнянь, а їх узагальнення — до дослідження характеристичних функцій ймовірнісних законів.

До інших властивостей, які можна трактувати як подібні до властивостей многочленів, слід віднести різноманітні співвідношення вигляду

$$M_f(r) \sim \mu_f(r) \sim m_f(r), \quad \ln M_f(r) \sim \ln m_f(r), \quad \Psi(\ln M_f(r)) \sim \Psi(\ln \mu_f(r)),$$

та пов'язані з ними нерівності. Тут

$$m_f(r) := \min\{|f(z)| : |z| = r\} \quad (r > 0).$$

У цьому підрозділі ми опишемо публікації і результати, отримані в цих публікаціях, що стосуються взаємного поводження максимума модуля, зазвичай цілої функції, та максимального члена відповідного ряду, яким зображається дана функція.

М.М. Шеремета у статтях [12,36–38] узагальнив формалізацію Т. Кеварі [13] і У. Хеймана [15] класичного методу Вімана-Валірона, що дало змогу знайти ефективні застосування методу, як до рядів Діріхле з додатною монотонно зростаючою до нескінченності послідовністю показників, так і, зокрема, до лакунарних степеневих рядів ([36–42, 45, 49]). Власне, нехай фіксована послідовність $\lambda = (\lambda_n)$ така, що $0 = \lambda_0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to +\infty$ $(1 \leqslant n \to +\infty)$, а F — ціла функція, що задана абсолютно збіжним у всій комплексній площині рядом Діріхле (цілим рядом Діріхле)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n e^{z\lambda_n}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Клас таких рядів Діріхле позначимо через $\mathcal{D}(\lambda)$.

Розглянемо послідовність додатних чисел (α_n) таку, що послідовність

$$\varkappa_n = \frac{\ln \alpha_n - \ln \alpha_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \quad (n \geqslant 0)$$

монотонно зростає, а послідовність (s_n) така, що $-\infty < s_0 < \varkappa_{n-1} < s_n < \varkappa_n$ $(n \geqslant 1)$. Точка $x \in \mathbb{R}$ в [36] називається *нормальною* (відносно послідовностей $(F_n), (\lambda_n), (\alpha_n), (s_n)$), якщо існує таке натуральне число ν, що для всіх $n \geqslant 0$ виконується нерівність

$$|F_n/F_\nu| \exp\{x(\lambda_n - \lambda_\nu)\} \leqslant \alpha_n/\alpha_\nu \exp\{s_\nu(\lambda_n - \lambda_\nu)\}.$$

У протилежному випадку, точка $x \in \mathbb{R}$ є винятковою.

Оскільки $\alpha_n/\alpha_\nu \exp\{s_\nu(\lambda_n - \lambda_\nu)\} < 1$ для всіх $n \neq \nu$, а x — нормальна точка, то $\nu(x, F) = \nu$. У цьому випадку також $\nu(s_\nu, \alpha) = \nu$ для $\alpha(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{s\lambda_n}$. Результативність дослідження тепер знову залежить від вдалого вибору послідовності (α_n) такої, що

$$\mu(x, \alpha) = \max\{|\alpha_n| e^{x\lambda_n} : n \geq 0\} < +\infty,$$

тобто, $\alpha_n e^{x\lambda_n} \to 0$ $(n \to +\infty)$, для всіх $x \in \mathbb{R}$. При цьому в подальших дослідженнях, що стосувалися можливості застосовності описаного підходу до аналітичних функцій в одиничному крузі або у фіксованій (відмінній від всієї комплексної площини) півплощині виявилось, що цієї останньої умови також достатньо для застосовності, описаних вище схем. Зазначимо, що в подальшому класичний підхід Вімана і Валірона (а також Хеймана-Кеварі-Шеремети) протягом тривалого часу розглядався лише у випадках, коли апріорні умови забезпечували те, що ряд порівняння $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n/\alpha_n e^{z\lambda_n}$ є цілою функцією. Тим не менше, слід зазначити, що в дослідженнях П. Фентона [50, 52], М. Хомяк [34, 35], О. Скасківа [57] метод з різною результативністю застосовувався і у випадках, коли ряд порівняння гіпотетично міг бути розбіжним скрізь.

Для $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ і $x \in \mathbb{R}$ через

$$\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \max\{n : |F_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x, F)\}$$

позначимо центральний індекс ряду (2).

Через $(R_j(F))_{j=0}^{+\infty}$ позначимо послідовність точок стрибка центрального індексу цілого ряду Діріхле $F(z)$, занумеровану так, що $\nu(\sigma, F) = j$ при $R_j(F) \leq \sigma < R_{j+1}(F)$ і, якщо $\nu(R_{j+1}(F), F) = j + p$, то $R_{j+1}(F) = R_{j+2}(F) = \ldots = R_{j+p}(F) < R_{j+p+1}(F)$. При цьому уникаємо формального означення нормальних і виняткових точок $\sigma \in \mathbb{R}$ (див. означення [36], [12, с.35]), приймаючи проте до уваги той факт, що оцінки зверху загального члена ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ через максимальний кожного разу отримуються із властивостей так званого ряду порівняння, який для функції $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ вигляду (2) і додатної неспадної на $[0, +\infty)$ функції $\alpha(t)$ набуває вигляду

$$F_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \exp\Big\{z\lambda_n + \int_0^{\lambda_n} \alpha(t)dt\Big\}.$$

Ключовим при описанні величини виняткових множин (тобто множин тих точок σ, для яких бажані оцінки зверху загального члена через максимальний член ряду можуть не виконуватись) є наступні прості твердження, що містяться у лемі 1. Відзначимо, що, як проміжний етап у міркуваннях вони неодноразово використовувались різними авторами (у статті [36] — доведення теореми 1, [38], [14] – доведення леми 2, [45] — доведення теорем 3 і 4, [44] — лем 1 і 2, [48] — доведення леми 1, див. також статті [68, 69] і т. п.). Слід також згадати, що подібне спостерігаємо у різних авторів і при розгляді степеневих рядів ([15, 52, 55, 56] і т. п.). Для повноти картини наведемо наступну лему з доведенням, не зважаючи на те, що воно є коротким і елементарним.

Лема 1. *Нехай додатна неспадна на $[0, +\infty)$ функція $\alpha(t)$ така, що для кожного $k \geqslant 0$ знайдеться точка $t_0 \in (\lambda_k, \lambda_{k+1})$ така, що $\alpha(t_0) > \alpha(\lambda_k)$. Якщо $F_\alpha \in \mathcal{D}(\lambda)$, то для всіх $j \geq 0$, $x \in [R_j(F_\alpha) + \alpha(\lambda_j),\ R_{j+1}(F_\alpha) + \alpha(\lambda_j)]$ і $n \geq 0$*

$$\frac{|F_n|e^{x\lambda_n}}{|F_j|e^{x\lambda_j}} \leq \exp\left\{-\int_{\lambda_j}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_j))dt\right\}, \tag{3}$$

а у випадку, коли $R_j(F_\alpha) < R_{j+1}(F_\alpha)$, то

$$\nu(x, F_\alpha) = j \quad \text{для} \quad x \in [R_j(F_\alpha) + \alpha(\lambda_j), R_{j+1}(F_\alpha) + \alpha(\lambda_j)).$$

Власне, лема 1 стверджує, що множина тих $x \geqslant R_1(F_\alpha)$, для яких нерівність (3) може не виконуватись міститься у множині

$$E = \bigcup_{j=0}^{+\infty} [R_{j+1}(F_\alpha) + \alpha(\lambda_j), R_{j+1}(F_\alpha) + \alpha(\lambda_{j+1})).$$

Доведення леми 1. Для простоти запису покладемо $\alpha_n = \int\limits_0^{\lambda_n} \alpha(t)dt$ і $R_n = R_n(F_\alpha)$ для $n \geq 0$.

Для $\sigma \in [R_j, R_{j+1}]$ за означенням максимального члена $\mu(\sigma, F_\alpha)$ для всіх $n \geq 0$ маємо

$$|F_n|e^{(\sigma\lambda_n + \alpha_n)} \leq \mu(\sigma, F_\alpha) = |a_j|e^{(\sigma\lambda_j + \alpha_j)}.$$

Тоді для $(\sigma - \alpha(\lambda_j)) \in [R_j, R_{j+1}]$ і $n \geq 0$ отримаємо

$$|F_n|e^{((\sigma-\alpha(\lambda_j))\lambda_n+\alpha_n)} \leq |a_j| \exp^{((\sigma-\alpha(\lambda_j))\lambda_j+\alpha_j)}.$$

Тому для всіх $n \geq 0$ і $\sigma \in [R_j + \alpha(\lambda_j), R_{j+1} + \alpha(\lambda_j)]$ маємо

$$\frac{|F_n|e^{\sigma\lambda_n}}{|a_j|e^{\sigma\lambda_j}} \leq \exp\{-(\alpha_n - \alpha_j) + \alpha(\lambda_j)(\lambda_n - \lambda_j)\} =$$

$$= \exp\left\{-\int_{\lambda_j}^{\lambda_n} \alpha(t)dt + \alpha(\lambda_j)\int_{\lambda_j}^{\lambda_n} dt\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\int_{\lambda_j}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_j))dt\right\}.$$

Отже, нерівність (3) доведено.

Враховуючи, що для $\sigma \in (R_j, R_{j+1})$ та $n \neq j$

$$|F_n|e^{\sigma\lambda_n+\alpha_n} < \mu(\sigma, F_\alpha),$$

то для $\sigma \in (R_j(F_\alpha) + \alpha(\lambda_j), R_{j+1}(F_\alpha) + \alpha(\lambda_j))$ нерівність (3) при $n \neq j$ також строга.

Оскільки $\alpha(t)$ — неспадна на $[0, +\infty)$, то для довільних невід'ємних цілих n і m, при $n \neq m$ виконується нерівність

$$\int_{\lambda_m}^{\lambda_n} (\alpha(t) - \alpha(\lambda_m))dt > 0.$$

Звідси і з нерівності (3) для $\sigma \in (R_j(F_\alpha) + \alpha(\lambda_j), R_{j+1}(F_\alpha) + \alpha(\lambda_j))$ у випадку $R_j(F_\alpha) < R_{j+1}(F_\alpha)$ отримуємо

$$\frac{|F_n|e^{\sigma\lambda_n}}{|a_j|e^{\sigma\lambda_j}} < 1$$

для всіх $n \neq j$, тобто $\nu(\sigma, F) = j$ і друге твердження леми 1 доведено, позаяк функція $\nu(\sigma, F)$ — напівнеперервна справа. □

Не дуже детальний огляд результатів з теорії Вімана-Валірона для цілих функцій знаходимо в [10] та в монографіях [5,11,12,82], а також в огляді [15], який багато років вважається класичним оглядом з даної тематики. Серед інших текстів, в яких є описання різних фрагментів досліджень і результатів з теорії Вімана-Валірона, посуті немає жодного більш-менш повного, який би охоплював принаймні основні моменти з великого різноманіття отриманих результатів. Зазначимо, що навіть давніх публікацій, не охоплених згаданим оглядом [15], є дуже багато. Оскільки в останні 10-15 років у різних авторів "прокинувся" інтерес до теорії Вімана-Валірона, автори даного тексту поставили перед собою завдання підготувати такий огляд. Сам текст є першою частиною, запланованого огляду, і стосуватиметься лише окремих досліджень, що стосуються цілих функцій від однієї комплексної змінної, зображуваних як степеневими рядами, так і (там, де це виглядатиме доречним) рядами Діріхле з монотонно зростаючою до нескінченності послідовністю показників. Принагідно відзначатимемо аналоги таких результатів для функцій, зображуваних інтегралами типу Лебега-Стілт'єса.

Наступні частини огляду стануть більш-менш незалежними від даного тексту і будуть в подальшому подані до друку окремо.

3. **Цілі функції, зображувані степеневими рядами і рядами Діріхле.**

3.1. **Співвідношення Бореля і нерівність Вімана: степеневі ряди.** Якщо $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ — ціла функція скінченного порядку $\rho_f < +\infty$, а $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \geq 0\}$ і $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, то добре відомо, що (див. [9, Part IV, Ch. 1, § 3, Problem 54]) співвідношення (Бореля)

$$\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r). \tag{4}$$

виконується при $r \to +\infty$. Цей елементарний факт часто приписують Е. Борелю. Вкажемо на те, що Е. Борель [16, с.62–70] встановив (при відсутності обмеження $\rho_f < \infty$), що для кожної цілої функції співвідношення (4) справджується вздовж деякої послідовності $r_j \to +\infty$, тобто при $r = r_j \to +\infty$.

Це ж твердження можна одержати також з одного результату А. Вімана [7], який довів, що для кожної цілої функції f і для кожного $\varepsilon > 0$ існує послідовність $r_j \to +\infty$ така, що при $r \in \{r_j\}$ виконується нерівність (Вімана)

$$M_f(r) < \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{5}$$

Ж. Валірон [2] довів, що для кожної цілої функції f і довільного $\varepsilon > 0$ існує така множина E скінченної логарифмічної міри, тобто,

$$\operatorname{meas}_{ln}(E) := \int_{E\cap[1,+\infty)} d\ln t < +\infty,$$

що нерівність (5) виконується для всіх $r \in [1, +\infty) \setminus E$. Відомо, що ([9, с. 177]) для цілої функції $f(z) = e^z$, $M_f(r) \sim \sqrt{2\pi}\mu_f(r) \ln^{1/2} \mu_f(r)$, $(r \to +\infty)$, тобто, твердження про нерівність (5) є точним у тому сенсі, що сталу $1/2$ в ній, взагалі кажучи, не можна замінити на менше число.

Найширше узагальнення згаданих результатів про нерівність типу Вімана одержав П. Розенблум [17], який, по суті, встановив, що

$$M_f(r) < \mu_f(r)\psi(\ln M_f(r))$$

для всіх $r \in (1, +\infty) \setminus E$ (E — множина скінченної логарифмічної міри на $[1, +\infty)$, де $\psi(t)$ — додатна неперервна функція, що зростає на $[0, +\infty)$ та для якої $\int_0^{+\infty} (\psi(t))^{-2} dt < +\infty$. Звідси випливає, зокрема, що співвідношення (4) і (5) виконуються при $r \to +\infty$ зовні множини скінченної логарифмічної міри.

Нехай $\ln_1 x = \ln x$, $\ln_{k+1} x := \ln \ln_k x$ для всіх цілих $k \geqslant 1$. В огляді [15] є таке уточнення твердження стосовно нерівності Вімана: Для довільної цілої трансцендентної функції f і кожного $\varepsilon > 0$ існує множина скінченної логарифмічної міри $E = E_f(\varepsilon)$ така, що для всіх $r \in (1; +\infty)\setminus E$ виконується нерівність

$$M_f(r) \leqslant \mu_f(r)\sqrt{\ln \mu_f(r)}\, \ln_2 \mu_f(r) \cdot \ldots \cdot \ln_k \mu_f(r)(\ln_{k+1} \mu_f(r))^{1+\varepsilon}. \tag{6}$$

Подібну нерівність можна знайти у статті П. Розенблума [17]. Питання про точність нерівності (6) обговорювалось також у статті Н. М. Сулейманова [18]. З отриманих у цих статтях результатів випливає таке твердження: Для кожного $k \in \mathbb{N}$ існують ціла трансцендентна функція f і $r_0 > 0$ такі, що для всіх $r \in (r_0; +\infty)$ виконується нерівність

$$M_f(r) \geqslant \mu_f(r)\sqrt{\ln \mu_f(r)}\ln_2 \mu_f(r) \cdot \ldots \cdot \ln_k \mu_f(r).$$

Скориставшись підходом з [17], Р. Р. Лондон ([19]) довів, що для кожної цілої функції співвідношення (4) виконується при $r \to +\infty$ зовні множини скінченної міри. При цьому нескладна модифікація його міркувань дозволяє ([21]) довести скінченність $h-$міри виняткової множини E

$$h - \mathrm{meas}(E) = \int_E h(x)dx < +\infty$$

з довільною функцією h такою, що $\ln h(r) = O(\ln r)$ $(r \to +\infty)$. Те ж саме є правильним ([24]) з довільною функцією h такою, що $\ln h(r) = o(\ln \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$.

У певному сенсі такий опис величини виняткової множини у співвідношенні Бореля (4) є непокращуваним описом її величини. Власне, нехай $h(x)$ — довільна додатна інтегровна на кожному інтервалі $(a, b) \subset [0, +\infty)$, $b < +\infty$ функція така, що $\int_0^\infty h(x)dx = +\infty$. Тоді, як випливає з [20, 21], для кожної функції $h_1(x) \uparrow +\infty$ $(x \uparrow +\infty)$ такої, що

$$\varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\ln h_1(x)}{\ln x} = +\infty$$

існують ціла функція f і стала $d > 0$ такі, що множина

$$E = \{r \geqslant 1\colon\ \ln M_f(r) > (1 + d)\ln \mu_f(r)\}$$

має нескінченну h-міру з $h(x) = h_1(x)/x$.

У статтях [22, 24] знайдено близький до непокращуваного опис величини виняткової множини у нерівності Вімана (5).

В даний час в літературі проблему відшукання непокращуваного опису величини виняткової множини в тому чи іншому співвідношенні з теорії Вімана-Валірона прийнято називати *проблемою Островського*, який цю проблему у 1995 році сформулював стосовно нерівності Вімана.

Нехай $\mathcal{L}^+$ — клас неперервних додатних на $[0; +\infty]$ функцій, що зростають до $+\infty$. У статті [22] доведено таке твердження: Якщо функція $h \in \mathcal{L}^+$ така, що $h(r) \le (\ln r)^{1/2}$ $(r > 2)$, то для кожної цілої функції f і для кожного $\varepsilon > 0$ нерівність

$$M_f(r) \le \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/2+\varepsilon} \ln^{1/2} r$$

виконується для всіх $r \in [1; \infty) \setminus E(\varepsilon, f)$, де множина $E(\varepsilon, f) \equiv E_2$ така, що

$$h\text{-meas } E_2 = \int_{E_2 \cap [1; +\infty)} \frac{h(r)}{r} dr < +\infty.$$

З отриманої для цілих рядів Діріхле в [23] теореми 2 випливає, що за умов $h \in \mathcal{L}^+$ і

$$\varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln h(r)}{\ln \ln \mu_f(r) - \ln \ln r} = q < +\infty$$

нерівність $M_f(r) \le \mu_f(r)(h(r)\ln \mu_f(r))^{p+\varepsilon}$, $p = (q + 1)/2$, виконується для кожного $\varepsilon > 0$ і для всіх $r \ge 1$ зовні деякої множини $E = E(\varepsilon, f)$ скінченної h-міри, тобто h-meas $E < +\infty$. У статті [24] доведене таке твердження.

Теорема 1 ([24])**.** *Нехай f — ціла функція. Якщо $h \in \mathcal{L}^+$ така, що $\ln^+ \ln^+ h(r) = o(\ln\ln \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$, то для кожного $\varepsilon > 0$ нерівність*

$$M_f(r) \leq h(r)\mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/2+\varepsilon} \tag{7}$$

виконується для всіх $r \in [1;+\infty) \setminus E_3(\varepsilon, f, h)$, де множина $E_3(\varepsilon, f, h) \equiv E_3$ така, що h-meas $E_3 < +\infty$. Якщо ж $\ln h(r) = (\ln \mu_f(r))^a$, $a > 0$, то для кожного $\varepsilon > 0$ нерівність

$$M_f(r) \leq h(r)\mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/2+1/2\max\{1,a\}+\varepsilon}$$

виконується для всіх $r \in [1;+\infty) \setminus E_3^*(\varepsilon, f, h)$, де множина $E_3^*(\varepsilon, f, h) \equiv E_3^*$ така, що h-meas $E_3^* < +\infty$.

Зауважимо, що з умови ([22]) $h(r) \leqslant \ln r$ $(r \geqslant r_0)$ випливає, що $\ln_2^+ h(r) = o(\ln_2 \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$ позаяк для цілої трансцендентної функції f виконується $\ln r = o(\ln \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$. Якщо ж $\ln^+ h(r) = o(\ln\ln \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$, то з нерівності (7) отримуємо, що для кожного $\varepsilon > 0$ нерівність (5) виконується для всіх $r \in [1;+\infty)\setminus E$, h-meas $E < +\infty$.

У статтях [22, 24], автори також знайшли, у певному сенсі, найкращий опис величини виняткової множини E у нерівності Вімана для цілих функцій від однієї комплексної змінної. З прикладу цілої функції, побудованої в [22] (див. також [24]), випливає, що опис, поданий у теоремі 1 виняткової множини для фіксованої цілої функції f істотно не може бути покращено. У статтях [22, 24] доведено, що для кожного $\varepsilon > 0$ існують ціла функція f і множина $E \subset [1;+\infty)$ такі, що для всіх $r \in E$

$$M_f(r) \leqslant \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu_f(r), \tag{8}$$

та

$$\int\limits_E \frac{(\ln \mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}}{r} dr = +\infty.$$

З іншого боку, у статті [24] встановлено також, що оцінка

$$\int\limits_E \frac{\sqrt{\ln \mu_f(r)}}{r} dr < +\infty$$

виняткової множини E у нерівності Вімана (8) виконується в деякому сенсі майже напевно. Попри щойно процитовані твердження, між ними є **певна прогалина**, яку бажано було би в подальшому закрити.

Виникає також таке **природне запитання**: яке описання виняткових множин у всіх наведених вище нерівностях типу Вімана є непокращуваним?

Сформулюємо тепер кілька результатів для випадкових цілих функцій. П. Леві [76] виявив, що для випадкових цілих функцій певного вигляду у класичній нерівності Вімана показник степеня $1/2$ майже напевне можна замінити на $1/4$ (*ефект Леві*). В подальшому, зокрема, під впливом цих статей П. Леві, було опубліковано доволі значну кількість статей, присвячених дослідженню цього ефекту як в класі випадкових цілих, так і аналітичних функцій. Тут наводимо формулювання лише деяких з цих результатів. Маємо сподівання, огляд цих досліджень опублікувати окремо.

Нехай $\Omega = [0,1]$, а P — міра Лебега на $\mathbb{R}$. Розглянемо ймовірнісний простір Штейнгауса $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, де $\mathcal{A}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин Ω. Нехай $(\xi_n(\omega))$ — деяка послідовність випадкових величин, заданих на цьому просторі. Нехай

$$f(z,\omega) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(\omega) a_n z^n.$$

В [77] П. Ердеш і А. Реньї довели, що якщо $(\xi_n) = (\varepsilon_n)$ — послідовність Радемахера, то для довільної f і кожного $\delta > 0$ і майже всіх ω максимум модуля випадкової функції $f(z,\omega)$ задовольняє нерівність

$$M_f(r,\omega) \leqslant \mu_f(r) \ln^{1/4} \mu_f(r) \{\ln\ln \mu_f(r)\}^{1+\delta}, \ r \geqslant 1, \ r \notin E_f(\delta,\omega), \tag{9}$$

де $E_f(\delta,\omega)$ — множина скінченної логарифмічної міри. Нагадаємо, що послідовністю Радемахера називається послідовність незалежних випадкових величин (ε_n), що набувають значення 1 і -1 з однаковою ймовірністю $1/2$.

Послідовність $(\xi_n(\omega))$ дійсних випадкових величин називається мультиплікативною системою (MC), якщо $M\xi_{i_1}\xi_{i_2}\ldots\xi_{i_k} = 0$, для довільних $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ і кожного $k \geqslant 1$, де $M\xi$ — математичне сподівання випадкової величини ξ.

Позначимо через Ξ_0 — клас послідовностей комплексних випадкових величин $(\xi_n(\omega))$ таких, що кожна з послідовностей $\{\operatorname{Re}\xi_n\}, \{\operatorname{Im}\xi_n\} \in$ MC і $|\xi_n| = 1$ для всіх $n \geqslant 0$. В [78], [79] доведено, що твердження П. Ердеша і А. Реньї виконується і у випадку послідовності $(\xi_n(\omega)) \in \Xi_0$.

Через Ξ_1 позначимо клас послідовностей комплексних незалежних субгаусових випадкових величин $(\xi_n(\omega))$, тобто, таких, що

$$(\exists C_1, C_2 > 0)(\forall n \in \mathbb{N})\colon P\{\omega\colon |\xi_n(\omega)| \geqslant t\} \leqslant C_1 \exp\{-t^2/C_2\}.$$

У статті [80] доведено таке твердження:

Якщо $(\xi_n) \in \Xi_1$, то для довільної f і кожного $\delta > 0$ і майже всіх ω

$$M_f(r,\omega) \leqslant \mu_f(r) \ln^{1/4} \mu_f(r) \{\ln\ln \mu_f(r)\}^{3/2+\delta}, \ r \geqslant 1, \ r \notin E_f(\delta,\omega), \tag{10}$$

де $E_f(\delta,\omega)$ — множина скінченної логарифмічної міри.

Слід зазначити, що степінь $1/4$ при $\ln \mu_f(r)$ у нерівностях (9) та (10) є точним. Зауважимо, що у статті [66] степінь $3/2$ в множнику $(\ln\ln \mu_f(r))^{3/2}$ з нерівності (10) уточнено до 1. Проте питання точності степеня в множнику $\ln\ln \mu_f(r)$ у нерівностях (9) та (10) залишається **повністю відкритим.**

Надалі скрізь, під мірою множини на дійсній прямій розумітимемо міру Лебега, тобто, $h -$ meas з $h(x) \equiv 1$ є мірою Лебега; позначатимемо meas $:= 1-$ meas. Зауважимо, що якщо $E \subset [1, +\infty)$, а $E_1 \subset [0, +\infty)$ її образ при відображенні $x = \ln r$, то

$$\operatorname{meas}_{\ln}(E) = \operatorname{meas}(E_1).$$

Нехай $\mathcal{E}_R$, $0 < R \leqslant +\infty$, — клас необмежених аналітичних функцій в крузі $\mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < R\}$ вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^n. \tag{11}$$

Позначимо через $\mathcal{H}_R$ клас неперервних додатних неспадних на $[0;R), R \leqslant +\infty$, функцій таких, що

$$\int\limits_{r_0}^{R} \frac{h(r)}{r} dr = +\infty \text{ для деякого } r_0 \in (0,R).$$

У статті [25] доведено таке твердження.

Теорема 2. *Нехай $h \in \mathcal{H}_R,\ R \in (0,+\infty]$. Для кожної аналітичної функції $f \in \mathcal{E}_R$, довільних функцій $\psi_j \in \mathcal{W}$ $(j \in \{1,2\})$ і для будь-якого $\delta > 0$ існують множина $E := E(\delta, f, h) \subset (0,R)$ і $r_0 \in (0,R)$ такі, що h-meas$E = \int_E h(r) d\ln r < +\infty$ і*

$$(\forall\ r \in (r_0,R) \setminus E)\colon \quad \mathfrak{M}_f(r) \leqslant \mu_f(r) \sqrt{h(r)\psi_2\Big(h(r)\psi_1\big(\ln\big(\mu_f(r)h(r)\big)\big)\Big)},$$

зокрема,

$$(\forall\ r \in (r_0,R) \setminus E)\colon \quad \mathfrak{M}_f(r) \leqslant h(r)\mu_f(r)\big(\ln h(r) \ln(h(r)\mu_f(r))\big)^{1/2+\delta}.$$

Відзначимо ще два наступних твердження, які вперше отримано у статті [25].

Твердження 1 ([25])**.** *Нехай $h \in \mathcal{H}_R$, f — довільна аналітична функція, представлена степеневими рядом вигляду* (11) *з радіусом збіжності $R(f) = R \in (0;+\infty]$, та $r_0 \in (0,R)$ таке, що $\ln \mathfrak{M}_f(r_0) \geqslant 10,\ h(r_0) \geqslant 1$. Тоді існує множина $E_0 := E(f,h) \subset (0,R)$ така, що*

$$(\forall\ r \in (r_0,R) \setminus E_0)\colon \ \ \ln \mathfrak{M}_f(r) \leqslant 2\ln\big(h(r)\mu_f(r)\big),$$
$$h\,\text{-meas}\, E_0 := \int_E h(r) d\ln r < +\infty.$$

Якщо на додаток до умов Твердження 1 припустити, що функція f є необмеженою, то отримаємо таке твердження.

Твердження 2 ([25])**.** *Нехай $h \in \mathcal{H}_R$ і $f \in \mathcal{E}_R$ — довільна необмежена аналітична функція, представлена степеневим рядом вигляду* (11) *з радіусом збіжності $R(f) = R \in (0;+\infty]$. Тоді існує множина $E_0 := E(f,h) \subset (0,R)$ така, що нерівність*

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) \leqslant (1+o(1)) \ln\big(h(r)\mu_f(r)\big) \tag{12}$$

виконується при $r \uparrow R$ $(r \notin E_0)$, де $h\,\text{-meas}\, E_0 < +\infty$.

З Твердження 2, зокрема, випливає, що якщо $\ln^+ h(r) = o(\ln \mu_f(r))$ $(r \to +\infty)$, то з нерівності (12) отримуємо, що для кожного $\varepsilon > 0$ співвідношення (4) виконується при $r \uparrow R$ $(r \notin E_0)$, де $h\,\text{-meas}\, E_0 < +\infty$.

3.2. **Співвідношення Бореля і нерівність Вімана: ряди Діріхле.** Встановленню аналогів, як сформульованих вище, так і цілого ряду інших результатів Вімана і Валірона, для цілих рядів Діріхле присвятили свої дослідження К. Сугимура [26], Б. Амира [27], В. Шрінивасулу [28], Ф. Суньєр-Балагер [29], Є.Ф. Щучінская [30–32], Н.Ф. Якуніна [33], М.М. Хомяк [34, 35], [12, 36–39, 41, 43, 45–48, 69] та багато інших авторів.

Нагадаємо, що через $\mathcal{D}(\lambda)$ позначаємо клас *цілих* (абсолютно збіжних у всій комплексній площині) рядів Діріхле вигляду (2) з фіксованою послідовністю показників $\lambda = (\lambda_n)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow +\infty$ $(1 \leq n \to +\infty)$. Для цілого ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$

максимальний член якого $\mu(x,F)$ має скінченний порядок за Ріттом (R-порядок), тобто

$$\rho_R := \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\ln\ln\mu(x,F)}{x} < +\infty,$$

К. Сугимура вказав ([26]) умови, за яких виконується аналог (4), тобто, співвідношення (Бореля)

$$\ln M(x,F) \sim \ln\mu(x,F) \tag{13}$$

при $x\to+\infty$, тут $M(x,F)=\sup\{|F(x+it)|\colon t\in\mathbb{R}\}$. Остаточний варіант як цього твердження, так і тверджень про асимптотичні співвідношення, що виконуються за відсутності виняткових множин, ми залишаємо наразі поза рамками даного тексту.

Б. Амира ([27]) вказав умови, при яких, зокрема, співвідношення (13) справджується вздовж деякої послідовності значень x. Є.Ф. Щучінская розглядала ряди (2), що задовольняють умову $\lambda_{n+1}-\lambda_n\geq\varphi(n+1)-\varphi(n)$, тут φ — логарифмічна або степенева функція, Н.Ф. Якуніна — лише ряди з показниками $\lambda_n=\ln n$. Цілі ряди Діріхле за умови

$$\lambda_{n+1}-\lambda_n\geq h>0 \ (n\geq 0) \tag{14}$$

розглядав Ф. Суньєр-Балагер ([29]).

У найзагальнішому вигляді задачу встановлення умов, при виконанні яких співвідношення (13) справджується при $x\to+\infty$ зовні виняткової множини вперше, мабуть, розглянув М.М. Шеремета ([38]), при цьому він висловив припущення, що умова

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\lambda_n}<+\infty \tag{15}$$

є необхідною і достатньою для того, щоб співвідношення (13) виконувалось при x зовні деякої множини скінченної міри Лебега для кожного цілого ряду Діріхле (2) з класу $\mathcal{D}(\lambda)$ (тобто, з фіксованою послідовністю показників $\lambda=(\lambda_n)$). Твердження з цього припущення вперше у повному обсязі доведене в [49]. Умову (15) можна послабити ([69]), якщо розглядати підкласи класу $\mathcal{D}(\lambda)$, що визначаються обмеженнями вигляду

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\ln\mu(x,F)}{x\Phi(x)}<+\infty, \tag{16}$$

де $\Phi(x)$ — деяка зростаюча до $+\infty$ функція. При цьому, виняткова множина за описаних в статті [69] умов, у співвідношенні Бореля має нульову лінійну щільність, тобто, зокрема, може бути істотно більшою зо множину скінченної міри, яка є винятковою в твердженні зі статті [49]. Власне, правильне таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $\Phi(x)$ — деяка зростаюча до $+\infty$ на промені $[x_0,+\infty)$ функція. Якщо виконується умова*

$$(\forall b>0)\colon\quad \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\sum_{\lambda_n\leqslant b\Phi(t)}\frac{1}{n\lambda_n}=0,$$

то для кожного ряду Діріхле $F\in\mathcal{D}(\lambda)$, для якого виконується умова (16)*, співвідношення Бореля* (13) *виконується при $x\to+\infty$ зовні деякої множини нульової лінійної щільності.*

Природно, як і вище у випадку нерівності Вімана чи співвідношення Бореля для цілих функцій, заданих степеневими рядами, так і у випадках всіх інших співвідношень, кожного разу постає проблема остаточності опису величини виняткової множини. Так, скінченність міри Лебега, є непокращуваним описом (див. [58, 59]) величини виняткової множини у співвідношенні для усього класу $\mathcal{D}(\lambda)$.

Теорема 4. *Для кожної невід'ємної функції $h(x) \uparrow +\infty$ $(x \uparrow +\infty)$ існують послідовність $\lambda = (\lambda_n)$, для якої виконується умова* (15), *ціла функція $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ і стала $d > 0$ такі, що множина*

$$E = \{x \geqslant 0\colon\ \ln M(x, F) > (1 + d) \ln \mu(x, F)\}$$

має нескінченну h-міру.

Подібне **питання** про виняткову множину у співвідношенні Бореля для рядів Діріхле з підкласу, що визначається умовою (16), **залишається повністю відкритим**.

У цьому зв'язку цілком природно постає **питання** про можливість уточнення описання виняткової множини, зокрема, у випадку співвідношення Бореля для цілих рядів Діріхле. Нижче ми опишемо подібні уточнення в підкласах, що визначаються обмеженнями знизу на мінімально можливу швидкість зростання максимального члена таких рядів (див., наприклад, статтю [68]).

Окремі дослідження стосувалися умов виконання істотно загальнішого співвідношення (*узагальненого співвідношення Бореля*)

$$\omega(\ln M(x, F)) - \omega(\ln \mu(x, F)) \leqslant d + o(1) \tag{17}$$

при $x \to +\infty$ зовні деякої виняткової множини скінченної міри Лебега, де ω — довільна фіксована додатна неперервна зростаюча на $[0, +\infty)$ функція.

У випадку, якщо $\varphi(t) = \exp\{\omega(t)\}$ є повільно зростаюча і $\varphi(t\varphi(t)) \sim \varphi(t \ln t) \sim \varphi(t)$, то в [47] вказано необхідну і достатню умову для того, щоб існувала функція φ така, що співвідношення (17) справджується для кожної функції вигляду (2) з класу $\mathcal{D}(\lambda)$ при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега. У статті [61] розглянуто випадок функцій ω, який виключає випадок повільного зростання функції φ, власне, там розглянуто випадок для функцій, зокрема, таких, що $t \leq \varphi(t) \leq e^t$. Зауважимо, що при $\omega(t) \equiv \ln t$ співвідношення (17) переходить в (13), а при $\omega(t) \equiv t$ (17) переходить у співвідношення

$$M(x, F) \sim \mu(x, F).$$

Метод доведення, який при цьому використовується в [61], експлуатує ідею П. Розенблума [17] і відрізняється від модифікації класичного методу Вімана-Валірона (див., наприклад, в У.К. Хеймана ([15]) і М.М. Шеремети ([36, 37]) або в [49]). Власне, в основі розгляду в статті [61] лежить застосування названого підходу Розенблума до додатних інтегралів з класу інтегралів типу Лапласа-Стілт'єса. Нижче ми також опишемо деякі результати такого сорту.

Зазначимо, що **питання** встановлення загальних умов, що забезпечують виконання тверджень описаного типу, наприклад, у випадку повільного зростання функції φ, є практично **повністю відкритим**.

Ключовим моментом у доведенні достатності умови (15) у праці [49] виявилась вдала регуляризація часткових сум ряду (15). Зазначимо, що цей підхід, а також ідея покладена у доведення необхідності ([49]) дозволила одержати необхідні і достатні умови для виконання (13) при $x \to +\infty$ зовні деякої множини нульової лінійної щільності ([69]), а також до кінця розв'язати деякі інші задачі (див., наприклад, [45, 62]).

Для вимірної за Лебегом множини $E \subset [0, +\infty)$ скінченної міри $\operatorname{meas} E < +\infty$ і функції $h \in \mathcal{L}^*$ її верхньою і нижньою h – щільностями у нескінченності назвемо відповідно величини

$$D_h E = \varlimsup_{R\to+\infty} h(R) \operatorname{meas} (E \cap [R, +\infty))$$

і

$$d_h E = \varliminf_{R\to+\infty} h(R) \operatorname{meas} (E \cap [R, +\infty)).$$

У класі цілих рядів Діріхле з заданою системою показників введемо підкласи

$$\mathcal{D}^+(\lambda, \Phi) = \Big\{ F \in \mathcal{D}(\lambda) \colon K_F^+ := \varliminf_{x\to+\infty} \frac{\ln \mu(x, F)}{x\Phi(x)} > 0 \Big\}$$

і

$$\mathcal{D}^*(\lambda, \Phi) = \Big\{ F \in \mathcal{D}(\lambda) \colon K_F^* := \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln \mu(x, F)}{x\Phi(x)} > 0 \Big\},$$

де функція Φ з класу $\mathcal{L}^+$. Очевидно, що $\mathcal{D}^+(\lambda, \Phi) \subset \mathcal{D}^*(\lambda, \Phi)$.

У статті [68] доведено таку теорему про оцінку загального члена ряду Діріхле.

Теорема 5. *Нехай $V \in \mathcal{L}_0^*$, $h \in \mathcal{L}^*$, $\Phi \in \mathcal{L}^+$. Якщо $F \in \mathcal{D}^+(\lambda, \Phi)$ і виконується умова*

$$(\forall b > 0) : \lim_{n\to+\infty} h\left(\varphi(b\lambda_n) + \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} \right) \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} = 0, \tag{18}$$

то для всіх $n \geq 0$ і $x \in [0, +\infty)$ зовні множини E_1 нульової верхньої h-щільності ($D_h E_1 = 0$), виконується нерівність

$$|F_n| e^{x\lambda_n} \leq \mu(x, F) \exp\left\{ -\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t} dV(t) \right\}, \tag{19}$$

де $\nu = \nu(x, F)$ і φ — функція обернена до функції Φ.

Зауваження 1. Для функцій $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ і $\Phi \in \mathcal{L}^+$ теорему 5 можна сформулювати у наступному вигляді.

Нехай $V \in \mathcal{L}_0^*$, $h \in \mathcal{L}^*$, $\Phi \in \mathcal{L}^+$. Якщо $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, $K_F^+ > 0$ і виконується умова

$$\lim_{n\to+\infty} h\left(\varphi\Big(\frac{2}{K_F^+} \lambda_n \Big) + \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} \right) \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} = 0$$

то правильне твердження теореми 5.

Насправді, з доведення цієї теореми 5 у статті [68] випливає, що досить вимагати виконання умови (18) при деякому $b \geq \frac{2}{K_F}$. Деяке уточнення міркувань з доведення теореми 5 дає змогу останню умову замінити на ще слабшу: умова (18) виконується при деякому $b > \frac{1}{K_F}$.

Нехай L_1 — клас функцій $h \in L$ для яких

$$h(x + O(1)) = O(h(x)) \ (x \to +\infty),$$

а L_2 — клас функцій $h \in L$ таких, що

$$h\Big(x + \frac{1}{h(x)}\Big) = O(h(x)) \qquad (x \to +\infty).$$

В класі $\mathcal{D}^*(\lambda, \Phi)$ виконується таке твердження.

Теорема 6. *Нехай $V \in L_0$, $h \in L_1$, $\Phi \in \mathcal{L}^+$. Якщо $F \in \mathcal{D}^*(\lambda, \Phi)$ і виконується умова*

$$(\forall b > 0): \lim_{n\to+\infty} h\left(\varphi(b\lambda_n)\right) \int_{\lambda_n}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t} = 0, \tag{20}$$

то для всіх $n \geq 0$ і $x \in [0, +\infty)$ зовні множини E_1 нульової нижньої h-щільності ($d_h E_1 = 0$), виконується нерівність (19), де $\nu = \nu(x, F)$, а φ — функція обернена до Φ.

Зауваження 2. Як вже відзначалося вище, тут досить вимагати виконання умови (20) при деякому $b \geq \frac{2}{K_F}$ (власне, після уточнення доведення, знову навіть при деякому $b > \frac{1}{K_F}$).

З наведених вище теорем випливають такі твердження.

Наслідок 1. *Нехай $h \in L_2$, $\Phi \in \mathcal{L}^+$. Якщо $F \in \mathcal{D}^+(\lambda, \Phi)$ і виконується умова*

$$(\forall b > 0)\colon h(\varphi(bx)) \int_x^{+\infty} \frac{\ln n(t)}{t^2} dt \to 0 \qquad (x \to +\infty), \tag{21}$$

то існує неперервна зростаюча до $+\infty$ при $t \to +\infty$ функція $C(t)$ така, що для всіх $n \geq 0$ і $x \in [0, +\infty)$ зовні множини E_1 нульової верхньої h-щільності ($D_h E_1 = 0$) виконується нерівність

$$|F_n| e^{x\lambda_n} \leq \mu(x, F) \exp\left\{ -\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} C(t) \ln n(4t) dt \right\}, \tag{22}$$

де $\nu = \nu(x, F)$.

Продемонструємо тепер, як отримані твердження застосовуються, наприклад, для доведення тверджень про співвідношення Бореля.

Припустимо, що нерівність (22) виконується для всіх $x \notin E$, де множина E така, що множина $[0, +\infty) \setminus E$ має точку скупчення на $+\infty$.

Зазначимо, що при $n = 0$ з нерівності (22) отримаємо, що нерівність

$$\mu(x, F) \geqslant |F_0| e^{x\lambda_0} \exp\left\{ \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} C(t) \ln n(4t) dt \right\}$$

виконується для всіх $x \notin E$. Якщо тепер припустити, що $|F_0| = 1$, $\lambda_0 = 0$, то звідси отримаємо, що

$$\ln \mu(x, F) \geqslant \int_0^{\lambda_\nu} \frac{C(t) \ln n(4t)}{t} dt \geqslant C(\lambda_\nu/2) \ln n(2\lambda_\nu) \cdot \ln 2$$

для всіх $x \notin E$. Далі,

$$\Sigma_0 := \frac{1}{\mu(x,F)} \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} |F_n| e^{x\lambda_n} \leqslant \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} \exp\Big\{ -\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} C(t) \ln n(4t) dt \Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} \exp\Big\{ -C(\lambda_\nu) \int_{\lambda_n/2}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} \ln n(4t) dt \Big\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} \exp\Big\{ -C(\lambda_\nu) \ln n(2\lambda_n) \int_{\lambda_n/2}^{\lambda_n} \frac{\lambda_n - t}{t^2} dt \Big\} =$$
$$= \sum_{\lambda_n \geqslant 2\lambda_\nu} \exp\Big\{ -C(\lambda_\nu) \ln n(2\lambda_n)(1 - \ln 2) \Big\} = o(1)$$

при $x \to +\infty$ $(x \in [0, +\infty) \setminus E)$, де $\nu = \nu(x, F)$. Остаточно тепер отримаємо спочатку, що

$$M(x,F) \leqslant \sum_{\lambda_n \leqslant 2\lambda_\nu} |F_n| e^{x\lambda_n} + \Sigma_0 \leqslant n(2\lambda_\nu)\mu(x,F) + o(\mu(x,F))$$

при $x \to +\infty$ $(x \in [0, +\infty) \setminus E)$, де $\nu = \nu(x, F)$. Але, щойно доведено, що

$$\ln n(2\lambda_\nu) \leqslant \frac{\ln \mu(x,F)}{C(\lambda_\nu/2) \ln 2} = o(\ln \mu(x,F))$$

при $x \to +\infty$ $(x \in [0, +\infty) \setminus E)$, де $\nu = \nu(x, F)$, позаяк $C(\lambda_\nu/2) \to +\infty$ $(\nu \to +\infty)$. А це завершує доведення того, що співвідношення (13) виконується при $x \to +\infty$ $(x \in [0, +\infty) \setminus E)$.

Застосування наведеної схеми міркувань і тверджень, аналогічних до наведених у цьому підрозділі, дозволяє отримати такі твердження:
i) Якщо $h \in L_2$, $\Phi \in \mathcal{L}^+$, $F \in \mathcal{D}^+(\lambda, \Phi)$ і виконується умова (21), то співвідношення (13) виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E_1 нульової верхньої h-щільності $(D_h E_1 = 0)$.
ii) Якщо $h \in L_1$, $\Phi \in \mathcal{L}^+$, $F \in \mathcal{D}^*(\lambda, \Phi)$ і виконується умова (21), то співвідношення (13) виконується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E_1 нульової нижньої h-щільності $(d_h E_1 = 0)$.

3.3. **Узагальнене співвідношення Бореля для додатних інтегралів: достатні умови.** У даному підрозділі опишемо детальніше дослідження, які стосуються аналогів співвідношення типу Бореля для додатних інтегралів типу Лапласа-Стілт'єса.

Нехай $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, ν невід'ємна міра на $\mathbb{R}_+$ з необмеженим носієм $\operatorname{supp} \nu$, $f(x)$ довільна невід'ємна ν-вимірна функція на $\mathbb{R}_+$, $S = \operatorname{supp} \nu \cap \{x \in \mathbb{R}_+ \colon \ f(x) > 0\}$. Через $\mathcal{I}(\nu)$ позначимо клас функцій $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ вигляду

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(u) e^{xu} \nu(du). \tag{23}$$

Для $F \in \mathcal{I}(\nu)$ і $x \in \mathbb{R}$ позначаємо

$$\mu_*(x,F) = \operatorname{ess\,sup}\{f(u)e^{xu} \colon u \in S\}.$$

У цілому рядів публікацій міркування істотно базуються на наступних двох лемах, що нескладно доводяться.

Лема 2. *Якщо $v(t)$ — невід'ємна, додатна при $t > t_0 \geq 0$, неспадна на $[0, +\infty)$ функція така, що*

$$\int_0^{+\infty} \frac{v(t)}{t^2} dt < +\infty,$$

то існує додатна неперервна на $[0, +\infty)$, зростаюча до $+\infty$ при $t \to +\infty$ функція $\psi(t)$ така, що

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty, \quad v(t) = o(\psi^{-1}(t)) \ (t \to +\infty).$$

Лема 3. *Нехай $g(x)$ — додатна диференційовна неспадна на $[0, +\infty)$ функція, а $\psi(t)$ — додатна інтегровна на $[0, +\infty)$ функція, для якої*

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{\psi(t)} < +\infty. \tag{24}$$

Тоді множина $E := \{x \geq 0 \colon g'(x) \geqslant h(x)\psi(g(x))\}$ має скінченну h-міру, тобто, нерівність

$$g'(x) < h(x)\psi(g(x))$$

виконуеться для всіх $x \in [0, +\infty) \setminus E$, при цьому

$$h - \text{meas}(E \cap [r, R]) = \int_{E \cap [r,R]} h(x) dx \leqslant \int_{g(r)}^{g(R)} \frac{dt}{\psi(t)} \qquad (0 \leqslant r < R \leqslant +\infty).$$

Нехай тепер $F_1 \in \mathcal{I}(\nu)$, тобто, функція, визначена на $\mathbb{R}_+$, за допомогою збіжного там інтегралу Лебега-Стілт'єса вигляду (23), де ν міра на $\mathbb{R}_+$ з необмеженим носієм supp ν, а $f(t)$ — додатна на supp ν функція. Зауважимо, що у цьому випадку для кожного $b > 0$

$$e^{bx} = o(F_1(x)) \ \ (x \to +\infty)$$

і тому $(\ln F_1(x))' \uparrow +\infty$ $(x \to +\infty)$, оскільки $\ln F_1(x)$ — опукла на $[0; +\infty)$ функція. Зрозуміло також, що $F_1 \in C^\infty(0, +\infty)$, тобто F_1 можна безліч разів диференціювати під знаком інтегралу.

Наступна лема містить нерівності, які є наслідками ймовірнісних нерівностей Маркова і Чебишова.

Лема 4. *Нехай $F_1 \in \mathcal{I}(\nu)$, а $g_1(x) = \ln F_1(x)$. Тоді для кожного $x > 0$ і кожної функції $c = c(x) > 1$*

$$F_1(x) \leq \frac{c}{c-1} \int_{|t - g_1{}'(x)| < \sqrt{c g_1{}''(x)}} f(t) e^{tx} \nu(dt),$$

$$F_1(x) \leq \frac{c}{c-1} \int_{0 \leqslant t < c g_1{}'(x)} f(t) e^{tx} \nu(dt).$$

Доведення. Справді, розглянемо при фіксованому $x > 0$ функцію

$$\Phi(u) = \begin{cases} 0, & u < 0; \\ \dfrac{1}{F_1(x)} \displaystyle\int_{[0;u)} f(t)e^{tx}\nu(dt), & u \geq 0. \end{cases}$$

Оскільки $\Phi(-\infty) = 0$, $\Phi(+\infty) = 1$, а також Φ — неспадна неперервна зліва, то Φ функція розподілу, тобто існує ймовірнісний простір $\big(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}\big)$, де $\mathbb{P}$ — деяка ймовірнісна міра на деякій $\sigma-$алгебрі $\mathcal{A}$ підмножин Ω, та невід'ємна випадкова величина ξ на ньому, для якої Φ є функцією розподілу

$$\Phi(u) = \mathbb{P}\{\omega \colon \xi(\omega) < u\}.$$

Тоді маємо, що математичні сподівання

$$\mathbf{E}\xi = \int_\Omega \xi(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_0^{+\infty} td\Phi(t) = \frac{1}{F_1(x)} \int_0^{+\infty} tf(t)e^{tx}\nu(dt) = \frac{F_1^{'}(x)}{F_1(x)} = g_1^{'}(x)$$

та

$$\mathbf{E}\xi^2 = \int_\Omega \xi^2(\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \int_0^{+\infty} t^2 d\Phi(t) = \frac{1}{F_1(x)} \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{tx}\nu(dt) = \frac{F_1^{''}(x)}{F_1(x)},$$

а дисперсія

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{E}(\xi - \mathbf{E}\xi)^2 = \mathbf{E}\xi^2 - (\mathbf{E}\xi)^2 = \frac{F_1^{''}(x)}{F_1(x)} - \Big(\frac{F_1^{'}(x)}{F_1(x)}\Big)^2 = g_1{''}(x).$$

Тому, використовуючи нерівність Чебишóва

$$\mathbb{P}\{\omega \colon |\xi(\omega) - \mathbf{E}\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathbf{D}\xi}{\varepsilon^2}$$

для $\varepsilon = \sqrt{c\mathbf{D}\xi}$ з довільним $c = c(x) > 1$ одержуємо

$$F_1(x) = \int_{|t - g_1{'}(x)| < \sqrt{cg_1{''}(x)}} f(t)e^{tx}\nu(dt) + F_1(x)\mathbb{P}\{\omega \colon |\xi(\omega) - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq$$

$$\leq \int_{|t - g_1{'}(x)| < \sqrt{cg_1{''}(x)}} f(t)e^{tx}\nu(dt) + \frac{1}{c}F_1(x),$$

тобто,

$$F_1(x) \leq \frac{c}{c-1} \int_{|t - g_1{'}(x)| < \sqrt{cg_1{''}(x)}} f(t)e^{tx}\nu(dt).$$

Подібно, за нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}\{\omega \colon \xi(\omega) \geq \varepsilon_1\} \leq \frac{\mathbf{E}\xi}{\varepsilon_1}$$

для $\varepsilon_1 = c\mathbf{E}\xi$ з довільним $c = c(x) > 1$ одержуємо

$$F_1(x) = \int_{|t| < cg_1{'}(x)} f(t)e^{tx}\nu(dt) + F_1(x)\mathbb{P}\{\omega \colon |\xi(\omega)| \geq \varepsilon_1\} \leq$$

$$\leq \int_{|t| < cg_1{'}(x)} f(t)e^{tx}\nu(dt) + \frac{1}{c}F_1(x).$$

Звідси остаточно маємо твердження леми. □

З леми 4, використовуючи окремо для кожної з функцій ${g_1}'(x)$ та $g_1(x)$ лему 3, негайно отримуємо таке твердження.

Лема 5. *Для кожної функції $c = c(x)$ і для всіх $x \in [0, +\infty) \setminus E$ (E — скінченної h-міри) виконуються нерівності*

$$F_1(x) \leq \frac{c}{c-1} \int_{|t-{g_1}'(x)|<\sqrt{ch(x)\psi_2({g_1}'(x))}} f(t)e^{tx}\nu(dt),$$
$$F_1(x) \leq \frac{c}{c-1} \int_{0\leqslant t<ch(x)\psi_1(g_1(x))} f(t)e^{tx}\nu(dt),$$

де ψ_1, ψ_2 — довільні додатні інтегровні на $[0, +\infty)$ функції, що задовольняють умову (24).

Якщо вибрати тепер тепер $h(x) \equiv 1$, то з леми 5 отримуємо наступну теорему. Вживаємо позначення $\nu(a, b] = \nu((a, b])$.

Теорема 7. *Нехай $F_1 \in \mathcal{I}(\nu)$, ω — додатна неспадна на $[0, +\infty)$ функція з незростаючою похідною, а функції ψ_1, ψ_2 — додатні неперервні такі, що задовольняють умову (24), ψ_1 — монотонно зростаюча. Якщо*

$$\frac{1}{t} = O(\omega'(t)) \quad (t \to +\infty), \tag{25}$$

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \omega'\left(\psi_1^{-1}(t)\right) \ln \nu(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}] \leq p, \tag{26}$$

то знайдеться така множина E скінченної міри, що виконується нерівність

$$\varlimsup_{x\to+\infty, x\notin E} (\omega(\ln F_1(x)) - \omega(\ln \mu_*(x)) \leq p. \tag{27}$$

Безпосереднім наслідком з теореми 7 є наступна теорема.

Теорема 8. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, функції ω, ψ_j такі, як в теоремі 7. Якщо*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \omega'\left(\psi_1^{-1}(t)\right) \ln n_\lambda(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}] \leq d, \tag{28}$$

то співвідношення (13) *виконується при $x \to +\infty$ зовні множини деякої скінченної міри, де*

$$n_\lambda(a, b] = \sum_{a<\lambda_n\leq b} 1.$$

Для того, щоб одержати теорему 8 з теореми 7, досить вибрати неперервну функцію $f(t), a(\lambda_n) = |F_n|$, міру v таку, що $v(a, b] = n_\lambda(a, b]$, а також

$$F_1(x) = \mathfrak{M}(x, F) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| e^{x\lambda_n}$$

і пригадати нерівність Коші $\mu(x) = \mu(x, F) \leq M(x, F)$, а також нерівність $M(x, F) \leq \mathfrak{M}(x, F)$.

Зауваження 3. *Якщо $\omega'(t)\ln t \to 0 (t \to +\infty)$, то умова (26) з $p = 0$, яка виконується для функцій ψ_1, ψ_2 з теореми 7, та умова*

$$\ln \nu(0;t] = o\left(\frac{1}{\omega'(\psi_3^{-1}(t))}\right) \quad (t \to +\infty) \tag{29}$$

з теореми 8, яка виконується для деякої функції ψ_3 — неперервної зростаючої додатної і такої, що задовольняє (24), є рівносильні. Те ж саме стосується умов (28) (з $d = 0$) та

$$\ln n(t) = o\left(\frac{1}{\omega'\left(\psi_3^{-1}(t)\right)}\right) \quad (t \to +\infty). \tag{30}$$

Справді, якщо виконується умова (29), то досить вибрати $\psi_2(t) = t^2$, $\psi_1(t) = \frac{1}{2}\psi_3(t)$. Оскільки $\nu(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}] = \nu(0; 2t]$ та $\psi_3^{-1}(2t) = \psi_1^{-1}(t)$, то звідси негайно одержуємо умову (26) для деяких функцій ψ_1 і ψ_2 з теореми $1'$. Навпаки, якщо виконується умова (26), то поступаємо у наступний спосіб. Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне, а R_1 — найменше з тих $r > 0$, що для всіх $t \geq r$ одночасно $\psi_2(t) \geq 1$ і

$$\ln \nu(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}] < \frac{\varepsilon}{\omega'(\psi_1^{-1}(t))}; \tag{31}$$

покладемо тепер $R_{n+1} = R_n + \sqrt{\psi_2(R_n)}$ $(n \geq 1)$. Тоді, з (31) маємо

$$\ln \nu\left((0; R_{j+1}] - \nu(0; R_j]\right) < \frac{\varepsilon}{\omega'(\psi_1^{-1}(R_j))} \quad (j \geq 1),$$

звідси, завдяки монотонності $\omega'(\psi_1^{-1}(t))$, одержуємо

$$\nu(0, R_{n+1}] = \sum_{j=1}^{n} \left(\nu(0; R_{j+1}] - \nu(0; R_j]\right) + \nu(0; R_1] \leq$$

$$\leq O(1) + n \exp\left\{\frac{\varepsilon}{\omega'(\psi_1^{-1}(R_n))}\right\} \quad (n \to +\infty).$$

Але, очевидно, $R_{n+1} \geq R_n + 1 \geq \ldots \geq n + R_1 \geq n$, тому

$$\ln \nu(0; R_{n+1}] \leq \ln R_n + \frac{\varepsilon}{\omega'(\psi_1^{-1}(R_n))} + o(1) \ (n \to +\infty).$$

Покладемо тепер $\psi_3(t) = \min\{t^2, \ \psi_1(t)\}$. Тоді з умови $\omega'(t)\ln t \to 0$ при $t \to +\infty$ маємо

$$\ln \nu(0; R_{n+1}] \leq 2\ln\sqrt{R_n} + \frac{\varepsilon}{\omega'({\psi_1}'(R_n))} + o(1) \leq$$

$$\leq \frac{2\varepsilon}{\omega'(\sqrt{R_n})} + \frac{\varepsilon}{\omega'(\psi_1^{-1}(R_n))} + o(1) \leq \frac{3\varepsilon}{\omega'(\psi_3^{-1}(R_n))} + o(1) \quad (n \to +\infty).$$

Звідси, для $R_n \leq t < R_{n+1}$

$$\omega'\left(\psi_3^{-1}(t)\right) \ln \nu(0; t] \leq \omega'\left(\psi_3^{-1}(R_n)\right) \ln \nu(0; R_{n+1}] = o(1) \ (t \to +\infty).$$

Тобто, виконується умова (29). Очевидно, що умова (24) для функції ψ_3 виконується.

Зауваження 4. З умов (25) та (26), з врахуванням зауваження 3, одержуємо, що

$$\ln\nu(0,t] = o\left(\psi_3^{-1}(t)\right) \quad (t\to+\infty) \tag{32}$$

для деякої функції ψ_3 такої ж, що і в зауваженні 1. Подібно, з умови (28) одержуємо

$$\ln n_\lambda(t) = o\left(\psi_3^{-1}(t)\right)(t\to+\infty). \tag{33}$$

Остання умова, як нескладно перевірити (див. [49]), еквівалентна до умови (15), а умова (32) до умови

$$\int^{+\infty}\frac{d\ln\nu(0;t]}{t} < +\infty. \tag{34}$$

Для того, щоб одержати (32) досить зауважити, що з (25) та (26) випливає

$$\ln\nu\left(t-\sqrt{\psi_2(t)};\ t+\sqrt{\psi_2(t)}\right] = O\left(\psi_3^{-1}(t)\right)\ (t\to+\infty).$$

Тому замінивши в останньому співвідношенні функцію $\psi_3(t)$ на функцію $\widetilde{\psi}_3(t)$, для якої виконуються умови (24) та

$$\ln\nu\left(t-\sqrt{\psi_2(t)};\ t+\sqrt{\psi_2(t)}\right] = o\left(\widetilde{\psi}_3^{-1}(t)\right)(t\to+\infty),$$

у відповідності із зауваженням 3 одержуємо (32).

Вище, на прикладі доведення співвідношення типу Бореля ми продемонстрували, як при цьому працює модифікація Кеварі-Хеймана-Шеремети методу Вімана-Валірона. Тут ми наведемо доведення аналогів таких співвідношень для інтегралів на основі викладених щойно допоміжних результатів. Доведемо таку теорему про співвідношення типу Бореля.

Теорема 9. *Якщо $F_1\in\mathcal{I}(\nu)$ і виконується умова (32) з додатною неперервною зростаючою на $[0,+\infty)$ функцією ψ_3, для якої виконується (24), то знайдеться множина E — скінченної міри така, що*

$$\varlimsup_{x\to+\infty,x\notin E}\left(\frac{\ln F_1(x)}{\ln\mu_*(x)}\right)\le 1. \tag{35}$$

Доведення теореми 7. Оскільки $\int_0^{+\infty}dt/\psi_2(t)<+\infty$, то для функції

$$\widetilde{\psi_2}(t)=\frac{\psi_2(t)}{l(t)},\quad l(t)=\left(\int_t^{+\infty}\frac{dx}{\psi_2(x)}\right)^{-\frac12},$$

ця умова також, очевидно, виконується. Застосуємо лему 5 з $h(x)\equiv1$ і функцією $\widetilde{\psi_2}$ замість функції ψ_2. Функцію $c(x)$ виберемо нижче так, щоб $c(x)\to+\infty$ $(x\to+\infty)$. За лемою 5 для всіх $x\notin E_1$ (E– скінченної міри), враховуючи, що ω' — не зростає, маємо

$$\omega(\ln F_1(x))-\omega(\ln\mu_*(x))\le\omega'(\ln\mu_*(x))(\ln F_1(x)-\ln\mu_*(x))\le\omega'(\ln\mu_*(x))\cdot$$
$$\cdot\left\{c_1(x)+\ln\nu\left(g_1{}'(x)-\sqrt{c\widetilde{\psi_2}(g_1{}'(x))};g_1{}'(x)+\sqrt{c\widetilde{\psi_2}(g_1{}'(x))}\right]\right\}, \tag{36}$$

де $c_1(x) = \ln\left(c(x)/(c(x)-1)\right)$. Застосовуємо тепер лему 3 до функції $g_1(x)$, з $h(x) \equiv 1$ та функцією $\psi_1\left(\frac{1}{2}t\right)$ замість функції $\psi_1(t)$. Оскільки для всіх $x \in [0,+\infty) \setminus E_2$ (E_2 — скінченної міри)

$$g_1{}'(x) < \psi_1\left(\frac{1}{2}g_1(x)\right),$$

то $g_1(x) > 2\psi_1^{-1}(g_1{}'(x))$, крім того, із співвідношення (35) з леми 4, для всіх досить великих $x \notin E_3$ (E_3 — скінченної міри)

$$\ln\mu_*(x) > \frac{1}{2}g_1(x),$$

тому для всіх $x \notin E_2 \cup E_4$

$$\ln\mu_*(x) > \psi_1^{-1}(g_1{}'(x)).$$

Вибираючи тепер $c(x) = l(g_1{}'(x))$ і, застосовуючи підставляння $t = g_1{}'(x)$, із (36) одержуємо при $x \to +\infty$ ($x \notin E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$)

$$\omega(\ln F_1(x)) - \omega(\ln\mu_*(x)) \le \omega'(\psi_1^{-1}(t))c_1(x)+$$
$$+\omega'(\psi_1^{-1}(t))\ln\nu(t - \sqrt{\psi_2(t)}; t + \sqrt{\psi_2(t)}] \le p + o(1).$$

□

У зв'язку з наведеними у цьому підрозділі твердженнями зауважимо, що всі вони фактично стосуються випадку, коли у співвідношенні (27) функція ω така, що $\ln x \leqslant \omega(x) \leqslant x$ ($x \geqslant x_0$). Тому, природно постає така проблема.

Проблема 1 ([82]). *Які умови повинна задовольняти міра ν (послідовність λ), щоб для кожної функції $F_1 \in \mathcal{I}(\nu)$ ($F \in \mathcal{D}(\lambda)$) узагальнене співвідношення Бореля* (27) *виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега?*

3.4. **Необхідність умов. 1.** З теореми 9 отримуємо також наступне твердження. З [24] (для цілого ряду Діріхле див. у [49]) випливає таке твердження.

Теорема 10 ([24]). *Нехай $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi)$. Якщо*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{d\ln\nu_0(t)}{t} < +\infty, \quad \nu_0(t) := \nu((0,t]), \tag{37}$$

тоді співвідношення

$$\ln F(x) \le (1 + o(1))\ln\mu_*(x, F) \tag{38}$$

виконується при $x \to +\infty$ ($x \notin E$), де $E \subset \mathbb{R}_+$ є деякою множиною скінченної міри Лебега на $\mathbb{R}_+$, тобто $\operatorname{meas} E = \int_E dx < +\infty$.

Теорема 11. *Якщо $F_1 \in \mathcal{I}(\nu)$ і виконується умова (34), то співвідношення (35) виконується з деякою винятковою множиною E скінченної міри.*

Наслідок 2. *Нехай $\lambda = (\lambda_n)$ довільна послідовність така, що $0 \leqslant \lambda_n \uparrow +\infty$ ($0 \leqslant n \uparrow +\infty$). Для того, щоб для кожної функції $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ співвідношення Бореля* (13) *виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри Лебега необхідно і досить, щоб послідовність λ задовольняла умову* (15).

Твердження цього наслідку отримаємо негайно з теореми 11 та наступної теореми, яка встановлює непокращуваність (необхідність) умов теореми 11. При цьому слід пригадати, що умова (15) і умова (33) (умова (34) з $\nu(0,t]=n_\lambda(t)$) є рівносильними.

Теорема 12 ([63]). *Нехай ν — зліченно-адитивна міра на $\mathbb{R}_+$, для якої*

$$\int_0^{+\infty}\frac{d\ln\nu(0,t]}{t}=+\infty,\quad \ln\nu(0,t]=O(t)\,(t\to+\infty),$$

де $\nu(0,t]=\nu\{x\in\mathbb{R}_+ : x\le t\}$. Для кожного $d>0$ існує додатна функція $F_1\in\mathcal{I}(\nu)$ визначена для всіх $x\in\mathbb{R}_+$ інтегралом (23) така, що для деякого $x_0>0$ і для всіх $x\ge x_0$ виконується нерівність

$$\ln F_1(x)\ge(1+d)\ln\mu(x,F_1).$$

Доведення в [63] використовує модифікацію конструкції з [49], що застосовувалася там для доведення подібного твердження в класі цілих рядів Діріхле $\mathcal{D}(\lambda)$. Нехай

$$\nu_0(t)=\nu(0;t],\ N_0(t)=\int_1^t\frac{\nu_0(x)}{x}dx,\ B=(1+2d)^{-1},$$

$$\psi(y)=-By\int_1^y t^{-2}\ln(N_0(A(t+1))/\ln(t+1))dt,\quad 0<A<1,$$

$$f(y)=\begin{cases}\exp\{\psi(y)\}, & y\ge1;\\ 1, & 0<y\le1.\end{cases}$$

Наслідок 3. *Для того, щоб для кожної функції $F_1\in\mathcal{I}(\nu)$, де ν — зліченно-адитивна міра на $\mathbb{R}_+$, така, що $\ln\nu(0,t]=O(t)$ $(t\to+\infty)$, співвідношення (35) виконувалось при $x\to+\infty$ $(x\notin E)$, E – скінченної міри Лебега, необхідно і досить, щоб виконувалась умова (34).*

3.5. **Необхідність умов. 2.** Якщо для функції ω виконується умова $\omega'(t)\ln t\to0$ $(t\to+\infty)$, то, за зауваженням 3, умова (28) (відповідно, умова (26)) і умова (30) (відповідно, умова (29)) є рівносильними. Нехай $k(t)$ — функція обернена до $\frac{1}{\omega'(t)}$. Тоді з умови (30) (відповідно, з умови (29)) негайно випливає збіжність інтегралу

$$\int^{\infty}\frac{k(c(t)\ln n(t))}{t^2}dt<+\infty\quad\Big(\text{відповідно, }\int^{\infty}\frac{k(c(t)\ln\nu(0,t))}{t^2}dt<+\infty\Big)\tag{39}$$

для деякої функції $c(t)\to+\infty$ $(t\to+\infty)$. При цьому зі збіжності кожного з інтегралів в (39) окремо, випливає (30) (відповідно, (29)). Доведемо таку теорему.

Теорема 13. *Нехай функція ω — додатна зростаюча двічі диференційовна на $[0,+\infty)$ така, що ω' — спадає, при цьому $k'(t)$ — не спадає і $\ln(1+k'(t)/t)=o(t)$ $(t\to+\infty)$. Для кожної послідовності $\lambda=(\lambda_n)$, для якої розбіжний інтеграл*

$$\int^{+\infty}\frac{k(\ln n_\lambda(t))}{t^2}dt=+\infty\tag{40}$$

існує функція $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ така, що

$$\omega(\ln M(x,F)) - \omega(\ln \mu(x,F)) \geq b > 0 \quad (x \geq x_0).$$

Доведення. Зауважимо, що з умови (40) випливає розбіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(k(\ln(n+1)) - k(\ln n)\right) = +\infty. \tag{41}$$

Не зменшуючи загальності можемо вважати, що

$$k(\ln(n+1)) = O(\lambda_n) \ (n \to +\infty). \tag{42}$$

У протилежному випадку не складно показати, що існує підпослідовність (λ_n^*) послідовності (λ_n), для якої умови (41) та (42) виконуються одночасно. У цьому випадку, якщо $\lambda_n \notin \{\lambda_j^*\}$, то покладаємо $F_n = 0$; решту коефіцієнтів вибираємо, як і нижче. Отже, вважаємо, що для (λ_n) умови (41) та (42) виконуються одночасно. Нехай

$$c_n = \beta \left(k(\ln(n+1)) - k(\ln n)\right), \ \beta > 0, \quad F_n = -\sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda_n - \lambda_s}{\lambda_s} \cdot c_s \quad (n \geq 1), \ a_0 = 1.$$

Перевіримо, чи функція вигляду (2) з так вибраними коефіцієнтами належить до класу $\mathcal{D}(\lambda)$. Справді,

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda_n - \lambda_s}{\lambda_s} \cdot c_s = \lambda_n \sum_{s=1}^{n} \frac{c_s}{\lambda_s} - \beta k(\ln(n+1)),$$

тому з (42) і (41) маємо

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\lambda_n - \lambda_s}{\lambda_s} c_s = (1 + o(1))\lambda_n \sum_{s=1}^{n} \frac{c_s}{\lambda_s} \quad (n \to +\infty),$$

а оскільки $t = O(k(t))$ $(t + \infty)$, то вже елементарно показуємо, що $F \in \mathcal{D}(\lambda)$.

Далі нам потрібна така лема про властивості мажоранти Ньютона.

Лема 6. *Нехай $0 \leq \lambda_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$ і $F_n > 0$. Якщо $\varkappa_n = \frac{\ln a_{n-1} - \ln F_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \nearrow$ (не спадає), то:*
а) $\mu(x) = \max\left\{a_s e^{x\lambda_s} \colon s \geq 0\right\} = a_n e^{x\lambda_n}$ для всіх $x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$,
б) $\nu(x) = \max\left\{s \colon a_s e^{x\lambda_s} = \mu(x)\right\} = n$ для всіх $x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1})$ $(\varkappa_n < \varkappa_{n+1})$,
в) для всіх $x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1})$ $(\varkappa_n < \varkappa_{n+1})$, послідовність $\left(a_m e^{x\lambda_m}\right)$ — монотонно зростаюча для всіх $0 \leqslant m \leqslant n$, і спадна для всіх $m \geqslant n$.

Твердження леми 6 добре відоме. Зрештою, в його правильності можна переконатися безпосередньою перевіркою.

Продовжимо *доведення теореми 13.* Зауважимо, що у цьому випадку

$$\varkappa_n = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{c_s}{\lambda_s} \uparrow +\infty \ (n \to +\infty),$$

тому для $x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$ маємо

$$\ln \mu(x,F) = \ln F_n + x\lambda_n \leq \ln F_n + \varkappa_{n+1}\lambda_n = \sum_{s=1}^{n} c_s = \beta k(\ln(n+1)), \tag{43}$$

а для $m \le n-1$

$$\ln a_m + x\lambda_m \ge \varkappa_n\lambda_m - \sum_{s=1}^{m} \frac{\lambda_m-\lambda_s}{\lambda_s} c_s \ge \sum_{s=1}^{m} c_s = \beta k(\ln(m+1)).$$

Виберемо

$$m_1 = \frac{nk'(\ln(n+1)) - \ln(n+1)}{k'(\ln(n+1)) + \ln(n+1)}, \quad m = [m_1] \le n-1.$$

Тоді

$$(n-m) \ge n - m_1 = \frac{(n+1)\ln(n+1)}{k'(\ln(n+1)) + \ln(n+1)}$$

і, завдяки умові $\ln(1 + k'(t)/t) = o(t)$ $(t \to +\infty)$, одержуємо

$$\ln(n-m) \ge \ln(n+1) - \ln\left(1 + \frac{k'(\ln(n+1))}{\ln(n+1)}\right) =$$
$$= (1+o(1))\ln(n+1) \ (n \to +\infty). \tag{44}$$

Оскільки

$$\ln\frac{n+1}{m+1} \le \ln\frac{n+1}{m_1} \le \frac{n-m_1+1}{m_1} \le 2\frac{n-m_1}{m_1} =$$
$$= 2\frac{(n+1)\ln(n+1)}{nk'(\ln(n+1)) - \ln(n+1)},$$

то

$$k(\ln(n+1)) - k(\ln(m+1)) \le \ln\frac{n+1}{m+1} k'(\ln(n+1)) =$$
$$= 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{k'(\ln(n+1))}{k'(\ln(n+1)) - \frac{1}{n}\ln(n+1)}\ln(n+1) =$$
$$= (2+o(1))\ln(n+1) \ (n \to +\infty).$$

Якщо тепер вибрати $\beta < 1/2$, то звідси і з (44) одержуємо при $n \to +\infty$

$$\ln(n-m) - \beta(k(\ln(n+1)) - k(\ln(m+1))) \ge$$
$$\ge (1 - 2\beta + o(1))\ln(n+1). \tag{45}$$

Користуючись пунктом в) леми 6, для $x \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$ маємо

$$F(x) \ge \sum_{s=m}^{n} a_s e^{x\lambda_s} \ge (n-m)a_m e^{\varkappa_n\lambda_m}.$$

Застосовуючи тепер послідовно (43)–(45), одержуємо

$$\omega(\ln M(x,F) - \omega(\ln\mu(x,F)) \ge$$
$$\ge \omega(\ln(n-m) + \beta k(\ln(m+1))) - \omega(\beta k(\ln(n+1))) \ge$$
$$\ge (\ln(n-m) - \beta k(\ln(n+1)) + \beta k(\ln(m+1)))\omega'(\ln(n-m) + \beta k(\ln(m+1))) \ge$$
$$\ge (1-2\beta+o(1))\ln(n+1)/k^{-1}(\ln(n-m) + \beta k(\ln(m+1))) \ (n \to +\infty).$$

Зауважимо, що оскільки $k'(t)$ — не спадає, тому $\min\{k'(t)\colon t \ge 1\} = k'(1) = p > 0$ і

$$k\left(\left(1+\frac{1}{p}\right)t\right) \ge k(t) + \frac{1}{p}tk'(t) \ge k(t) + t,$$

а також

$$k^{-1}(\ln(n-m) + \beta k(\ln(m+1))) \le k^{-1}(\ln n + \beta k(\ln n)) \le$$

$$\leq k^{-1}(\ln n + k(\ln n)) \leq \left(1+\frac{1}{p}\right)\ln n.$$

Отже, негайно одержуємо

$$\omega(\ln M(x,F)) - \omega(\ln \mu(x,F)) \geq c_1 \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

з додатною сталою $c_1 > 0$. Залишилось вибрати $b = c_1 > 0$, а також довести, що існує підпослідовність (λ_n^*) послідовності (λ_n), для якої виконуються умови (41) і (42).

Зауважимо спочатку, що з умови $\ln(1+\frac{k'(t)}{t}) = o(t)$ $(t \to +\infty)$ випливає

$$c_n = k(\ln(n+1)) - k(\ln n) \to 0 \ (n \to +\infty).$$

Нехай $p_1 = \min\{p \geq 1\colon c_p < \frac{1}{2}\}$. Визначимо

$$r_2 = \min\{r \geq r_1 + p_1\colon k(\ln(p_1+1)) \leq \lambda_r\}, \quad p_2 = \max\left\{p \geq p_1\colon 1 \leq \sum_{s=p_1}^{p} \frac{c_s}{\lambda_{s+r_2}} < 2\right\}.$$

Якщо r_n та p_n визначені, то r_{n+1} та p_{n+1} визначимо у наступний спосіб

$$r_{n+1} = \min\{r \geq r_n + p_n\colon k(\ln(p_n+1)) \leq \lambda_r\}, \quad p_{n+1} = \max\left\{p\colon 1 \leq \sum_{s=p_n}^{p-1} \frac{c_s}{\lambda_{s+r_{n+1}}} < 2\right\}.$$

Для всіх s таких, що $p_n \leq s \leq p_{n+1}-1$, визначивши $\lambda_s^* = \lambda_{s+r_{n+1}}$ одержуємо

$$\frac{k(\ln(s+1))}{\lambda_s^*} = \left(\frac{k(\ln(s+1))}{\lambda_s^*} - \frac{k(\ln s)}{\lambda_{s-1}^*}\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{k(\ln(p_n+2))}{\lambda_{p_n+1}^*} - \frac{k(\ln(p_n+1))}{\lambda_{p_n}^*}\right) + \frac{k(\ln(p_n+1))}{\lambda_{p_n}^*} \leq$$

$$\leq \sum_{m=p_n}^{s} \frac{c_m}{\lambda_m^*} + \frac{k(\ln(p_n+1))}{\lambda_{p_n}^*} \leq \sum_{m=p_n}^{p_{n+1}-1} \frac{c_m}{\lambda_m^*} + \frac{k(\ln(p_n+1))}{\lambda_{p_n}^*}.$$

Зауважимо, що $\lambda_{p_n}^* = \lambda_{p_n+r_{n+1}} \geq \lambda_{r_{n+1}} \geq k(\ln(p_n+1))$, а також

$$\sum_{m=p_n}^{p_{n+1}-1} \frac{c_m}{\lambda_m^*} = \sum_{m=p_n}^{p_{n+1}-1} \frac{c_m}{\lambda_{m+r_{n+1}}} < 2$$

тому $k(\ln(s+1)) < 3\lambda_s^*$ для всіх s таких, що $p_n \leq s \leq p_{n+1}-1$ і для всіх $n \geq 1$, а отже, для всіх $s \geq p_1$. З іншого боку,

$$\sum_{s=p_n}^{p_{n+1}-1} \frac{c_s}{\lambda_s^*} = \sum_{s=p_n}^{p_{n+1}-1} \frac{c_s}{\lambda_{s+r_{n+1}}} \geq 1$$

і тому

$$\sum_{s=p_1}^{+\infty} \frac{c_s}{\lambda_s^*} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{s=p_n}^{p_{n+1}-1} \frac{c_s}{\lambda_s^*}\right) = +\infty.$$

□

Зауваження 5. *Якщо функція ω така, що для кожної функції $\varepsilon(t) \to +0$ $(t \to +\infty)$*

$$\frac{1}{\omega'(t\varepsilon(t))} = o\left(\frac{1}{\omega'(t)}\right) \ (t \to +\infty), \tag{46}$$

то умова (39) еквівалентна до умови

$$\int^{+\infty} \frac{k(\ln n_\lambda(t))}{t^2} dt < +\infty. \tag{47}$$

Справді, з умови (39) умова (47) випливає в очевидний спосіб. Якщо ж виконується (47), то існує функція $c(t) \uparrow +\infty (t \to +\infty)$ така, що

$$\int^{+\infty} \frac{c(t)}{t^2} k(\ln n_\lambda(t)) dt < +\infty.$$

Виберемо $\psi_3^{-1}(t) \asymp c(t)k(\ln n(t))$. Тоді, завдяки (46), маємо

$$\ln n_\lambda(t) = \frac{1}{\omega'\left(o\left(\psi_3^{-1}(t)\right)\right)} = o\left(\frac{1}{\omega'\left(\psi_3^{-1}(t)\right)}\right) \ (t \to +\infty),$$

тобто виконується умова (30), а разом з нею і (39).

Зауваження 6. *Умова (46) виконується, наприклад, коли виконується умова*

$$(\exists c \in [-1; 0)) : \frac{\omega''(t)}{\omega'(t)} t \le c \ (t \to +\infty). \tag{48}$$

Зауваження 7. *Якщо виконується умова (48), то для функції $k(t)$ оберненої до функції $\frac{1}{\omega'(t)}$ виконується умова $\ln(1 + \frac{k'(t)}{t}) = o(t)$ $(t \to +\infty)$ з теореми 13, а також умова $\omega'(t) \ln t = o(1)$ $(t \to +\infty)$.*

За допомогою зауважень 3, 5–7 з теорем 8 і 13 одержуємо наступну теорему.

Теорема 14. *Нехай ω — додатна зростаюча двічі диференційована на $[0, +\infty)$ функція зі спадною похідною такою, що $\frac{1}{t} = O(\omega'(t))$ $(t \to +\infty)$, виконується умова (48) і $k'(t)$ — не спадає. Для того, щоб для кожної функції $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ виконувалось співвідношення (17) при $x \to +\infty$ зовні множини скінченної міри необхідно і досить, щоб виконувалась умова (47)*

$$\int^{+\infty} \frac{k(\ln n_\lambda(t))}{t^2} dt < +\infty,$$

де $k(t)$ — функція обернена до функції $\frac{1}{\omega'(t)}$.

Наведемо приклади функцій $\omega(t)$, для яких виконуються умови теореми 3. Такими, очевидно, є $\omega(t) = (\ln t)^{1+\alpha}$ $(\alpha \ge 0)$, $\omega(t) = t^\beta$ $(0 < \beta < 1)$. У другому випадку $k(t) = (\beta t)^{\frac{1}{1-\beta}}$, а у першому $k(t) \sim (1+\alpha) t (\ln t)^\alpha$. У відповідності з цим одержуємо наступні наслідки з теореми 14.

Наслідок 4. *Нехай $\alpha \ge 0$. Для того, щоб для кожної функції $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ виконувалось співвідношення*

$$(\ln \ln M(x, F))^{1+\alpha} - (\ln \ln \mu(x, F))^{1+\alpha} \to 0$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2025. Випуск 97

при $x \to +\infty$ зовні множини скінченної міри, необхідно і досить, щоб

$$\int^{+\infty} t^{-2} \ln n_\lambda(t) \, (\ln\ln n_\lambda(t))^\alpha \, dt < +\infty.$$

Відзначимо у цьому наслідку випадок $\alpha = 0$. Оскільки відповідно до зауважень 2 і 3 умова (15) і умова (47) еквівалентні, то одержуємо наступне твердження.

Наслідок 5. *Для того, щоб для кожної функції $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ виконувалось співвідношення (13) при $x \to +\infty$ зовні множини скінченної міри, необхідно і досить, щоб виконувалась умова (15).*

Наслідок 6. *Нехай $0 < \beta < 1$. Для того, щоб для кожної функції $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ виконувалось співвідношення*

$$(\ln M(x, F))^\beta - (\ln \mu(x, F))^\beta \to 0$$

при $x \to +\infty$ зовні множини скінченної міри, необхідно і досить, щоб

$$\int^{+\infty} t^{-2} \, (\ln n_\lambda(t))^{\frac{1}{1-\beta}} \, dt < +\infty.$$

Гіпотеза 1. Твердження наслідків 4–6 залишаться правильними і в класі $\mathcal{I}(\nu)$ після заміни в їхніх умовах $n_\lambda(t)$ на $\nu(0, t]$.

При $\beta = \frac{1}{2}$ одержуємо розв'язок проблеми 5, сформульованої М.М. Шереметою ([47, с.118]).

Зазначимо, що умова $(\forall x \in \mathbb{R})\colon\ \mu_*(x, F) < +\infty$ виконується, тоді і тільки тоді, коли (наприклад, див. [71–73])

$$\varliminf_{\substack{u \to +\infty \\ u \in \operatorname{supp} \nu}} \frac{-\ln f(u)}{u} = +\infty.$$

Позначимо через L клас невід'ємних неперервних функцій $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ таких, що $\psi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ і через L^+ підклас функцій $\psi \in L$ таких, що $\psi(t) \nearrow +\infty$ при $t \to +\infty$.

У статті [63] (див. також [49]) було доведено, що для кожної додатної міри ν такої, що

$$\ln \nu_0(t) = O(t),\ t \to +\infty \quad \text{та} \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{d \ln \nu_0(t)}{t} = +\infty$$

існують функція $F \in \mathcal{I}(\nu)$ і додатна стала $d > 0$ такі, що нерівність

$$\ln F(x) \geqslant (1 + d) \ln \mu_*(x, F)$$

виконується для всіх $x \geqslant x_0$, тобто умова (37) у певному сенсі є необхідною умовою теореми A.

Нехай $\Phi \in L^+$. Через $\mathcal{I}(\nu, \Phi)$ ми позначимо клас функцій $F \in \mathcal{I}(\nu)$ таких, що

$$(\exists c > 0)\colon \quad \ln F(x) \le \Phi(cx) \quad (x \ge x_0),$$

$$\mathcal{I}^*(\nu, \Phi) := \{F \in \mathcal{I}(\nu)\colon (\exists c > 0)(\exists x_j \to +\infty)[\, \ln F(x) \le \Phi(cx)\ (x = x_j,\ j \geqslant 1)]\}.$$

З твердження 7 у [64, с. 135–137] випливає така теорема.

Теорема 15. *Нехай* $\Phi \in L^+$, $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi)$. *Якщо*

$$(\forall\ \eta > 0)\colon \quad \lim_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \int\limits_0^{\eta\Phi(R)} \frac{d\ln\nu_0(t)}{t} = 0, \tag{49}$$

тоді співвідношення (38) *виконується при* $x \to +\infty$ $(x \notin E)$, *де* E — *множина нульової лінійної щільності, тобто*

$$\mathcal{D}E := \overline{\lim_{R\to+\infty}} \frac{1}{R} \operatorname{meas}(E \cap [0, R]) = 0.$$

З [75, теорема 1] випливає таке твердження.

Теорема 16. *Нехай* $\Phi_0(x) = x\Phi(x)$, $\Phi \in L^+$, $F \in \mathcal{I}(\nu, \Phi_0)$. *Якщо умова* (49) *виконується, то співвідношення* (38) *виконується при* $\sigma \to +\infty$ $(\sigma \notin E)$, *де* E — *деяка множина нульової лінійної щільності, тобто* $\mathcal{D}E = 0$.

Зауваження 8. Якщо $t\Phi(t) = O(\Phi(2t))$ $(t \to +\infty)$, то $\mathcal{I}(\nu, \Phi) = \mathcal{I}(\nu, \Phi_0)$ з $\Phi_0(x) := x\Phi(x)$. Але, загалом,

$$\mathcal{I}(\nu, \Phi) \subset \mathcal{I}(\nu, \Phi_0),\ \mathcal{I}(\nu, \Phi) \neq \mathcal{I}(\nu, \Phi_0).$$

З твердження 8 з [64, с. 137–138] можна отримати наступну теорему.

Теорема 17. *Нехай* $\Phi \in L^+$, $F \in \mathcal{I}^*(\nu, \Phi)$. *Якщо виконується умова* (49), *то існує вимірна множина* $E \subset \mathbb{R}_+$ *така, що*

$$\underline{\mathcal{D}}E := \underline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \operatorname{meas}(E \cap [0, x]) = 0$$

і співвідношення (38) *виконується при* $x \to +\infty$ $(x \in \mathbb{R}_+ \setminus E)$.

3.6. **Аналоги нерівності Вімана для інтегралів і рядів Діріхле.** Отримаємо тепер достатні умови для справедливості зовні множини скінченної міри деяких узагальнень нерівності Вімана (5), а також покажемо їхню непокращуваність. Доведемо спочатку наступне твердження.

Теорема 18. *Нехай* $F_1 \in \mathcal{I}(\nu)$. *Якщо для деякої додатної неперервної на* $[0; +\infty)$ *функції* $\psi(t)$, *яка задовольняє умову (24), виконується*

$$(\exists p < +\infty)(\exists t_0 > 0)(\forall t \geqslant t_0)\colon\ \nu(t - \sqrt{\psi(t)}, t + \sqrt{\psi(t)}] \leqslant t^p, \tag{50}$$

то для будь-якого $\varepsilon > 0$ *існує множина* $E \subset \mathbb{R}_+$ *скінченної міри Лебега така, що для всіх* $x \in [0, +\infty) \setminus E$

$$F_1(x) \leqslant C\mu_*(x) \ln^p \mu_*(x) \ln^{p+\varepsilon} \ln \mu_*(x), \tag{51}$$

де C — *деяка залежна від* F *і* ε *стала.*

Доведення теореми 18 використовує лему 4 і лему 3 (з $h(x) \equiv 1$). Як і при доведенні теореми 7 для всіх $x \in [0, +\infty) \setminus E_1$ (E_1 — скінченної міри) маємо

$$F_1(x) \le \frac{c}{c-1}\mu_*(x)\nu\left(g'(x) - \sqrt{c\psi_2(g'(x))}; g'(x) + \sqrt{c\psi_2(g'(x))}\right], \tag{52}$$

де $g(x) = \ln F_1(x)$, $c = c(x) > 1$ — довільна функція, $\psi_2(t)$ — довільна додатна неперервна на $[0, +\infty)$ функція, для якої виконується умова (24).

Зауважимо тепер, що застосування леми 3 (до функції $g(x)$ з $h(x) \equiv 1$ та $\psi(x) = x \ln^{1+\varepsilon_1} x$) дає, що для кожного $\varepsilon_1 > 0$ існує множина E_2 скінченної міри така, що нерівність

$$g'(x) \leqslant g(x)(\ln g(x))^{1+\varepsilon_1},$$

виконується для всіх $x \in [0, +\infty) \setminus E_2$. Вибираючи в (52) $\psi_2(t) = \frac{1}{c}\psi(t)$ (тут $\psi(t)$ — функція з умови (50)) і застосовуючи умову (50), з нерівності (52) для всіх $x \in [0, +\infty) \setminus E_1$ отримаємо

$$F_1(x) \leqslant 2\mu_*(x)(g'(x))^p.$$

Далі, зрозуміло.

Сформулюємо такі елементарні наслідки з теореми 18.

Наслідок 7. *Нехай $F \in \mathcal{D}(\lambda)$. Якщо для деякої додатної неперервної на $[0; +\infty)$ функції $\psi(t)$, яка задовольняє умову (24), виконується*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln n_\lambda(t - \sqrt{\psi(t)}; t + \sqrt{\psi(t)}]}{\ln t} = p, \tag{53}$$

то для довільного $\varepsilon > 0$ і для всіх $x \in [0, +\infty) \setminus E$ (E — деяка множина скінченної міри)

$$M(x, F) \le \mu(x, F)(\ln \mu(x, F))^{p+\varepsilon}. \tag{54}$$

Наслідок 8. *Нехай $F_1 \in \mathcal{I}(\nu)$. Якщо для деякої додатної неперервної на $[0; +\infty)$ функції $\psi(t)$, яка задовольняє умову (24), виконується*

$$\varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\ln \nu(t - \sqrt{\psi(t)}; t + \sqrt{\psi(t)}]}{\ln t} = p, \tag{55}$$

то для довільного $\varepsilon > 0$ і для всіх $x \in [0, +\infty) \setminus E$ (E — деяка множина скінченної міри)

$$F_1(x) \le \mu_*(x)(\ln \mu_*(x))^{p+\varepsilon}.$$

На завершеність твердження теореми 18 (зокрема, на те, що у нерівності (51) число $p > 0$ у показнику множника $(\ln \ln \mu_*(x))^{p+\varepsilon}$, взагалі кажучи, не можна замінити на менше число) вказує наступне твердження.

Теорема 19. *Якщо міра ν така, що для деякої функції $\psi(t)$ — додатної неперервної на $[0, +\infty)$ і такої, що $\psi(t) = O\left(t \ln t \ln_2^2 t\right)$ $(t \to +\infty)$, виконується умова*

$$(\exists p > 0)(\exists C_1 > 0)(\exists t_0 > 0)(\forall t \geqslant t_0)\colon\ \nu(t - \sqrt{\psi(t)}, t + \sqrt{\psi(t)}] \geqslant C_1 t^p, \tag{56}$$

то для кожного $\varepsilon \in (0, p)$ існує функція $F \in \mathcal{I}(\nu)$ така, що

$$\frac{F_1(x)}{\mu^*(x) \ln^p \mu^*(x) \ln_2^{p-\varepsilon} \mu^*(x)} \to +\infty, \quad (x \to +\infty),$$

де $\mu^*(x) := \sup\{f(t)e^{xt} \colon t \geqslant 0\}$.

Зауваження 9. *Для міри Лебега $\nu(dx) = dx$ на $\mathbb{R}$ умови* (55) *і* (56) *виконуються з $p = 1/2$.*

Для доведення теореми 19, вважаючи, що умова (34) виконується, досить вибрати $f(u) = \exp\{-\beta u \ln_3^+ u\}$ $(u \geqslant \exp\exp(1))$, $f(u) = 0$ $(0 \leqslant u < \exp\exp(1))$, $h(u,x) = \ln f(u) + ux$ і розглянути функцію F_1 вигляду (23).

Наслідок 9. *Якщо для деякої додатної неперервної на $[0,+\infty)$ функції $\psi(t)$ такої, що $\psi(t) = O\left(t \ln t \ln_2^2 t\right)$ $(t \to +\infty)$, виконується умова*

$$(\exists p > 0): \quad \varliminf_{t\to+\infty} t^{-p} \cdot \nu\left(t - \sqrt{\psi(t)}; t + \sqrt{\psi(t)}\right] = p_1 > 0,$$

то знайдеться функція $F_1 \in \mathcal{I}(\nu)$, для якої

$$\frac{F_1(x)}{\mu^*(x)} (\ln \mu^*(x))^{-p} \to +\infty \quad (x \to +\infty).$$

Зауваження 10. *З тверджень наслідків 8 і 9 негайно маємо, що якщо для деякої функції $\psi(t) = O\left(t \ln t \ln_2^2 t\right)$ $(t \to +\infty)$, яка задовольняє умову (24), виконується*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln^+ n_\lambda(t - \sqrt{\psi(t)}; t + \sqrt{\psi(t)}]}{\ln t} = p \in (0,+\infty),$$

то знайдеться функція $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ така, що

$$M(x,F) = \mu(x,F)(\ln \mu(x,F))^{p+o(1)}$$

при $x \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної міри, при цьому

$$\frac{M(x,F)}{\mu(x,F)} (\ln \mu(x,F))^{-p} \to +\infty \quad (x \to +\infty).$$

Вкажемо на зв'язок одержаних тверджень з відомими аналогами нерівності А. Вімана (5). В [12, с.71] доведено, що для кожного цілого ряду Діріхле $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, показники якого задовольняють умову (14), для кожного $\varepsilon > 0$ і для всіх $x \in [0,+\infty) \setminus E$ (E — деяка множина скінченної міри) виконується

$$M(x,F) \leq \mu(x,F)(\ln \mu(x,F))^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{57}$$

Там же ([12, с.62]), див. також [74]) розглянуто цілі функції $F \in \mathcal{D}(\lambda)$ з показниками, лічильна функція яких задовольняє умову

$$|n(t) - \Delta t^\rho| \leq D, \ 0 < \Delta, \ \rho < \infty, \ \frac{1}{2} \leq D < \infty. \tag{58}$$

Для кожної такої функції, для будь-якого $\varepsilon > 0$ і для всіх $x \in [0,+\infty) \setminus E$ (E — деяка множина скінченної міри) виконується

$$M(x,F) \leq \begin{cases} \mu(x,F)(\ln \mu(x,F))^{\rho - \frac{1}{2} + \varepsilon}, & \rho \geq \frac{1}{2}; \\ 2D(1+\varepsilon)\mu(x,F), & \rho < \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{59}$$

Елементарно тепер перевіряється, що якщо вибрати $t \leq \psi(t) \leq t \ln^2 t$ — довільну функцію, то з умови (14) випливає умова (53) з $p \leq \frac{1}{2}$, а з умови (58) випливає

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln n_\lambda(t - \sqrt{\psi(t)}; t + \sqrt{\psi(t)}]}{\ln t} = \rho - \frac{1}{2}.$$

Звідси, у випадку $\rho < \frac{1}{2}$, враховуючи зауваження 6 і теорему 4, замість другої нерівності в (59) одержуємо нерівність $M(x,F) \le (1+\varepsilon)\mu(x,F)$, перша ж нерівність в (59) випливає з (54). З іншого боку, з останньої нерівності з доведення твердження 4 отримуємо, що для кожної послідовності $\lambda = (\lambda_n)$, яка задовольняє умову (58) існує функція $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, для якої

$$M(x,F) \ge \mu(x,F)(\ln\mu(x,F))^{\rho-\frac{1}{2}}\,(\ln_2\mu(x,F))^{\frac{1}{3}\rho-\frac{1}{6}+\varepsilon}\ \ (x\to+\infty),$$

тобто в першій нерівності з (59), за умови (58), ρ не можна замінити на меншу сталу. Крім того, очевидно, що (59) справджується за слабшої умови (53) з $p \le \rho - \frac{1}{2}$, при цьому ρ також не можна замінити на меншу сталу. Подібно, (57) – при виконанні (53) з $p \le \frac{1}{2}$.

Відзначимо також, що раніше цілі ряди Діріхле за умови (14) розглядав Ф. Суньєр-Балагер ([29]).

Зауваження 11. *Наведені вище аналоги нерівності (5) відповідають випадку* $\omega(t) = \frac{t}{\ln t}$ *у співвідношенні* $\overline{\lim}_{x\to+\infty}(\omega(\ln F_1(x)) - \omega(\ln\mu(x))) \le p$ *з теореми 7. Розглядаючи інші функції* $\omega(t)$ *можна одержати інші аналоги цієї нерівності.*

Повністю подібно, як і вище, одержуємо такі два твердження.

Твердження А. *Якщо для функції* $F_1 \in \mathcal{I}(\nu)$ *виконується умова*

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln^+\ln\nu(t-\sqrt{\psi(t)};t+\sqrt{\psi(t)}]}{\ln t} = p < 1,$$

де $\psi(t)$ *— деяка додатна неперервна на* $[0,+\infty)$ *функція, що задовольняє умову (24), то для кожного* $\varepsilon > 0$ *і для кожного* $x \in [0,+\infty)\setminus E$ *(*E *— деяка множина скінченної міри)*

$$F_1(x) \le \mu_*(x)\exp\left\{(\ln\mu_*(x))^{p+\varepsilon}\right\}.$$

Використання тієї ж функції, що і у доведенні теореми 19 приводить до наступного твердження.

Твердження Б. Якщо для послідовності $\lambda = (\lambda_n)$ існує додатна неперервна на $[0,+\infty)$ функція $\psi(t)$ така, що $\psi(t) = O\left(t\ln t\ln_2^2 t\right)$ $(t\to+\infty)$ і виконується умова

$$\underline{\lim}_{t\to+\infty}\frac{n_\lambda(t-\sqrt{\psi(t)};t+\sqrt{\psi(t)}]}{\exp\{t^p\}} = p_1 > 0,\ 0<p<+\infty,$$

то існує функція $F \in \mathcal{D}(\lambda)$, для якої

$$M(x,F) \ge \mu(x,F)\exp\left\{(\ln\mu(x,F))^p\,(\ln_2\mu(x,F))^p\,(\ln_3\mu(x,F))^{p-\varepsilon}\right\}$$

при $x\to+\infty$, де $\varepsilon\in(0,p)$ — довільне.

Теорема 20 ([81], Theorem 1)**.** *Нехай* $F \in \mathcal{I}(\nu)$. *Якщо*

$$(\exists\psi\in\mathcal{L})(\exists p_1<+\infty)(\exists t_0)(\forall t\geqslant t_0):\quad \nu(t-\sqrt{\psi(t)},t+\sqrt{\psi(t)}]\leqslant t^{p_1},$$

то для довільного $\varepsilon > 0$ *існує множина* $E_1 \subset \mathbb{R}_+$ *скінченної міри Лебега, тобто,* $\mathrm{meas}(E_1) := \int_{E_1} dx < +\infty$, *така, що для всіх* $x \in [0,+\infty)\setminus E$

$$F(x) \leqslant C\mu_*(x)\ln^{p_1}\mu_*(x)\ln_2^{p_1+\varepsilon}\mu_*(x).$$

Тут C *– стала, що залежить лише від функції* F *і* ε.

Теорема 21 ([81], Theorem 2)**.** *Нехай функція $\psi \in \mathcal{L}$ така, що $\psi(t) = O(t \ln t \ln_2^2 t)$ $(t \to +\infty)$, а міра ν така, що $\ln \nu(0, t] = O(t)$ $(t \to +\infty)$ і*

$$(\exists C > 0)(\exists p_1 > 0)(\exists t_0 > 0)(\forall t \geqslant t_0)\colon \nu(t - \sqrt{\psi(t)}, t + \sqrt{\psi(t)}] \geqslant C t^{p_1}.$$

Тоді, для кожного $\varepsilon \in (0, p_1)$ існує функція $F \in \mathcal{I}(\nu)$ така, що

$$\frac{F(x)}{\mu^*(x) \ln^{p_1} \mu^*(x) \ln_2^{p_1 - \varepsilon} \mu^*(x)} \to +\infty, \ (x \to +\infty).$$

Висловимо таке **припущення**: *Твердження Б справджується і в класі $\mathcal{I}(\nu)$ після заміни в його умові*

$$n_\lambda(t - \sqrt{\psi(t)}; t + \sqrt{\psi(t)}] \ \text{ на } \ \nu(t - \sqrt{\psi(t)}; t + \sqrt{\psi(t)}].$$

Список використаної літератури

1. Valiron G. *Sur les fonctions entieres d'ordre fini et d'ordre null et en particulier les fonctions a correspondance reguliere*// Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). – 1914. – V.5. – P. 117–257.
2. Valiron G. *Sur le maximum du module des fonctions entieres*// C.r. Acad. Sci. – 1918. – V.166. – P. 605–608.
3. Valiron G. *Sur un theoreme de M. Hadamard*// Bull. Sci. Math. – 1923. – V.47, no.1. – P. 177–192.
4. Valiron G. *Sur l'abscisse de convergence des series de Dirichlet*// Bulletin de la S. M. F. – 1924. – V.52. – P. 166–174.
5. Valiron G. Theory of integral functions. – New York, Chelsea, 1949.
6. Valiron G. Functions analytiques. – Paris, Press Univer. de France, 1954.
7. Wiman A. Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten Gliebe der zugehörigen Taylorischen Reiche// Acta Math. – 1914. – V.37. – P. 305–326.
8. Wiman A. Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten betrage beigegebenen Argumente der Function// *Acta Math.* – 1916. – V.41. – P. 1–28.
9. Pólya G., Szegő G. Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. – Berlin: Springer, V.2, 1925.
10. Wittich H. Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. – Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1955. – 164 p.
11. Hayman W.K. Subharmonic functions. V.2. – London Math. Soc. Monographs, V.20, London, Academic Press, 1989.
12. Sheremeta M.M. Entire Dirichlet series. – Kyiv: ISDO, 1993. – 168 p. (in Ukrainian)
13. Kövari T. *On the Borel exceptional values of lacunary integral functions*// J. Anal. Math. – 1961. – V.9. – P. 71–109. https://doi.org/10.1007/BF02795340
14. Kövari T. *A gap-theorem for entire functions of infinite order*// Michigan Math. J. – 1965. – V.12. – P. 133–140. doi: 10.1307/mmj/1028999302
15. Hayman W.K. *The local growth of power series: a survey of the Wiman-Valyron method*// Canad. Math. Bull. – 1974. – V.17, no.3. – P. 317–358.
16. Borel E. Lecons sur les fonctions entieres. – Paris: Gauthier–Villars, 1921.
17. Rosenbloom P. *Probability and entire functions*, Stud. Math. Anal. and Related Topics, Stanford: Calif. Univ. Press. – 1962. – P. 325–332.
18. Suleimanov N.M. Estimates of Wiman–Valiron type for solutions of differential equations// *Differ. Uravn.* – 1982. – V.18, no.1. – P. 176–177. (in Russian)

19. London R.R. *Note on a lemma Rosenbloom*// Quart. J. Math. – 1970. – V.21, no.81. – P. 67–69.
20. Filevych P.V. *On London's theorem on Borel's relation for entire functions*// Ukrainian Mathematical Journal. – 1998. – V.50, no.11. – P. 1578–1580. (in Ukrainian)
21. Filevych P.V. *Exact estimate of the exceptional set in Borel's relation for entire functions*// Ukrainian Mathematical Journal – 2001. – V.53, no.2. – P. 286–288. (in Ukrainian)
22. Skaskiv O.B., Filevych P.V. *On the size of an exceptional set in the Wiman theorem*// Mat. Stud. – 1999. – V.12, no.1. – P. 31–36. https://matstud.org.ua/texts/1999/12_1/12_1_031-036.pdf
23. Skaskiv O.B. *Estimates of measures of exceptional sets in the Wiman–Valiron theory* // Nonlinear Boundary Value Problems. Collected Scientific Papers. – 2001. – V.11. – Donetsk, 2001. – P. 186–190. (in Ukrainian)
24. Skaskiv O.B., Zrum O.V. *On an exceptional set in the Wiman inequalities for entire functions*// Mat. Stud. – 2004. – V.21, no.1. – P. 13–24. (in Ukrainian) doi:10.30970/ms.21.1.13-24
25. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B. *Wiman's type inequality for analytic and entire functions and h-measure of an exceptional sets*// Carpathian Math. Publ. – 2020. – V.12, no.2. – P. 492–498. https://doi.org/10.15330/cmp.12.2.492-498
26. Sugimura K. *Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der ganzen Funktionen auf Dirichletschen Reihen*// Math. Zeitschr. – 1929. – Bd.29. – S. 264–277.
27. Amira B. *Maximalbetrag und Maximalglied Dirichletscher Reihen*// Math. Zeitschr. – 1930. – Bd.31. – S. 594–600.
28. Sreenivasulu V. *The maximum term and the maximum modulus of an entire Dirichlet series*// J. Indian Math. Soc. – 1973. – V.37, no.1–4. – P. 197–208.
29. Sunyer-Balaguer F. *Generalizacion del metodo de Wiman-Valiron a una classe de series de Dirichlet*// Publ. semin. mat. Fac. cient. Zaragoza: 1962, V.3. – P. 43–47.
30. Shchuchinskaya E.F. *Analogues of Wiman's theorem for Dirichlet series*// Mathematical Analysis and Its Applications. – Rostov-on-Don: Rostov State University Press, 1978. – P. 148–156. (in Russian)
31. Shchuchinskaya E.F. *On Borel's inequality for entire functions of finite order*// Proceedings of the North Caucasus Scientific Center of Higher School, Natural Sciences. – 1981. – no.1. – P. 22–23. (in Russian)
32. Shchuchinskaya E.F. *Asymptotic estimates for certain classes of entire Dirichlet series*// Proceedings of the North Caucasus Scientific Center of Higher School, Natural Sciences. — 1986. — no.3. — P. 47–50. (in Russian)
33. Yakunina N.F. *Analogues of Wiman's theorem for Dirichlet series*// Mathematical Analysis and its Applications. – Rostov-on-Don: Rostov State University Press, 1974. – P. 218–225. (in Russian)
34. Khomyak M.M. *The maximum term of a Dirichlet series specifying an entire function*// Soviet Math. (Iz. VUZ). – 1982. – V.26. no.10. – P. 92–95.
35. Khomyak M.M. *The Wiman-Valiron method for entire functions, defined by Dirichlet series, with a growth condition on certain sequences*// Ukr. Math. J. – 1983. – V. 35, no.4. – P. 447–451. https://doi.org/10.1007/BF01093102
36. Sheremeta M. N. *The Wiman-Valiron method for dirichlet series*// Ukr. Math. J. – 1978. – V. 30, no.4. – P. 376–383. https://doi.org/10.1007/BF01085861
37. Sheremeta M.N. *Asymptotic properties of entire functions defined by Dirichlet series and of their derivatives*// Ukr. Math. J. – 1979. – V. 31, no.6. – P. 558–564. https://doi.org/10.1007/BF01092538

38. Sheremeta M. N. *Analogues of Wiman's theorem for Dirichlet series*// Math. USSR-Sb. – 1981. – V. 38, no.1. –P. 95–107.
39. Sheremeta M.N. *Asymptotics of entire functions defined by Dirichlet series and satisfying first-order differential equations with exponential coefficients*// Differential Equations. – 1981. – V.17, no.6. – P. 1139–1142. (in Russian)
40. Sheremeta M.N. *The growth in an angle of entire functions represented by lacunary series*// Siberian Math. J. – 1980. – V.21, no.3. – P. 460–469. https://doi.org/10.1007/BF00968191
41. Sheremeta M.N. *Growth in a strip of entire functions represented by Dirichlet series*// Math. USSR-Izv. – 1982. – V.18, no.3. – P. 587–598. https://doi.org/10.1070/IM1982v018n03ABEH001401
42. Sheremeta M.N. *Entire ridge functions*// Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. – 1981. – no.4. – P. 56–63. (in Russian)
43. Sheremeta M.N. *The maximal term of a Dirichlet series absolutely converging in the half-plane*// Soviet Math. (Iz. VUZ). – 1986. – V.30, n.4. – P. 84–87.
44. Skaskiv O.B., Sheremeta M.N. *On the asymptotic behavior of entire Dirichlet series*// Math. USSR-Sb. – 1986. – V.59, no.2. – P. 379–396. https://doi.org/10.1070/SM1988v059n02ABEH003141
45. Sheremeta M.M. *On the derivative of an entire Dirichlet series*// Math. USSR-Sb. – 1990. – V.65, no.1. – P. 133–145. https://doi.org/10.1070/SM1990v065n01ABEH002076
46. Sheremeta M.M. *On a relation between the maximum modulus and the maximal term of an entire dirichlet series*// Mat. Stud. – 1991. – V.1. – P. 33–43. doi:10.30970/ms.1.33-43
47. Sheremeta M.M. *On a relation between the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series*// Mat. Stud. – 1994. – V.3. – P. 61–66.
48. Sheremeta M.M. *Behavior of the maximum of the absolute value of an entire Dirichlet series outside an exceptional set*// Math. Notes. – 1995. – V.57, no.2. – P. 198–207. https://doi.org/10.1007/BF02309154
49. Skaskiv O.B. *Behavior of the maximum term of a Dirichlet series that defines an entire function*// Math. Notes. – 1985. – V.37, №1. – P. 24–28.
50. Fenton P.C. *Some results of Wiman–Valiron type for integral functions of finite lower order*// *Ann. of Math.* (2). – 1976. – V.103. – P. 237–252. http://www.jstor.org/stable/1971005
51. Fenton P.C. *The minimum modulus of gap power series*// Proc. Edinb. Math. Soc. – 1978. – V.21. – P. 49–54.
52. Fenton P.C. *Wiman–Valiron theory for entire functions of finite lower growth*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1979. – V.252. – P. 221–232. http://www.jstor.org/stable/1998086
53. Fenton P.C. *Minimum modulus of gap power series*// Complex Variables and Elliptic Equations. – 2006. – V.51, no.4, 347–355. DOI: 10.1080/17476930600603382
54. Fenton P.C. *A note on the Wiman-Valiron method*// Proc. Edinb. Math. Soc. – 1993. – V.37. – P. 53–55.
55. Fuchs W.H.J. *Asymptotic evalution of integrals, and Wiman-Valyron theory*// Complex anal. and appl. Lect. Int. semin. course. Trieste, 1975, **1**, Vienna, 1976, 235–283.
56. Fuchs W.H.J. *A look Wiman-Valyron theory*// Lect. Notes Math. – 1977. – V.599. – P. 46–50.
57. Skaskiv O.B. *On the Polya conjecture concerning the maximum and minimum of the modulus of an entire function of finite order given by lacunary power series*// Anal. Math. – 1990. – V.16, no.2. – P. 143–157.
58. Salo T.M., Skaskiv O.B., Trakalo O.M. *On the best possible description of exceptional set in Wiman–Valiron theory for entire function*// Mat. Stud. – 2001. – V.16, no.2. – P. 131–140.
59. Filevych P.V. *Asymptotic relations between the means of Dirichlet series*// Mat. Stud. – 2003. – V.19, no.2. – P. 127–140.

60. Salo T.M., Skaskiv O.B. *The minimum modulus of gap power series and h-measure of exceptional sets*// arXiv: 1512.05557v1 [math.CV] 17 Dec 2015. – 17 p.
61. Skaskiv O.B. *On certain relations between the maximum modulus and the maximal term of an entire Dirichlet series*// Math. Notes. – 1999. – V.66, №2. – P. 223–232.
62. Sheremeta M.N. *On the convergence rate of the partial sums of positive entire Dirichlet series*// Anal. Math. – 1990. – V.17, no.1. – P. 47–54.
63. Skaskiv O.B., Trakalo O.M. *On the stability of the maximum term of the entire Dirichlet series*// *Ukr. Mat. Zh.* – 2005. – V.57, no.4. – P. 571–576. (in Ukrainian); English transl. in Ukrainian Math. J. – 2005. – V.57, №4. – P. 686–693.
64. Скасків О.Б., Тракало О.М. *Асимптотичні оцінки інтегралів Лапласа*// Mat.Stud. – 2002. – V.18, no.2. – P. 125–146.
65. Grosse-Erdmann K.-G. *A note on the Wiman-Valiron inequality*// arXiv:2409.06499v1 [math.CV] 10 Sep 2024. https://doi.org/10.48550/arXiv.2409.06499
66. Agneessens K., Grosse-Erdmann K. *On the rate of growth of random analytic functions, with an application to linear dynamics*// Canadian J. Math. – 2025. – P. 1–21. https://doi.org/10.4153/ S0008414X25101491
67. Grosse-Erdmann K.-G. *A note on the Wiman-Valiron inequality*// Arch. Math., 2025. – V.124. – P. 63–74. https://doi.org/10.1007/s00013-024-02061-2
68. Skaskiv O.B., Salo T.M. *Entire Dirichlet series of rapid growth and new estimates for the measure of exceptional sets in theorems of the Wiman–Valiron type*// Ukr. Math. J. – 2001. – V.53, no.6. – P. 978–991. https://doi.org/10.1023/A:1013308103502
69. Sheremeta M.M. *Equivalence of the logarithms of the maximum modulus and the maximum term of an entire series of Dirichlet*// Math. Notes. – 1987. – V.42, no.2. – P. 624–630. https://doi.org/10.1007/BF01240449
70. Salo T.M., Skaskiv O.B., Trakalo O.M. *On the best possible description of exeptional set in Wiman-Valiron theory for entire function*// Mat. Stud. – 2001. – V.16, №2. – P. 131–140.
71. Posiko O.S., Skaskiv O.B., Sheremeta M.M. *Estimates of the Laplace–Stieltjes integral* // Mat. Stud. – 2004. – V.21, no.2. – P. 179–186. (in Ukrainian)
72. Posiko O.S., Sheremeta M.M. *Asymptotic estimates for Laplace-Stieltjes integrals*// Ukr. Math. Visn. – 2005. – V.2, no.4. – P. 541–549. (in Ukrainian); English transl. in Ukr. Math. Bull. – 2005. – V.2, no.4. – P. 547–555.
73. Zadorozhna O.Yu., Skaskiv O.B. *Elementary remarks on the abscissas of convergence of Laplace–Stieltjes integrals* // Bukovinian Mathematical Journal. – 2013. – V.1, no.3–4. – P. 45–50. (in Ukrainian)
74. Sheremeta M.N. *Asymptotic Properties of Entire Functions Defined by Power Series and Dirichlet Series*: Extended Abstract of Doctoral Dissertation in Physical and Mathematical Sciences – Kyiv, 1987. (in Russian)
75. Zikrach D.Yu., Skaskiv O.B. *Asymptotic external estimation of the exeptional sets of Laplace-Stieltjes integrals*// Nauk. Visn. Chern. Univ. Math. – 2011. – V.1, №3. – P. 38–43.
76. Lévy P. *Sur la croissance de fonctions entière*, Bull. Soc. Math. France. – 1930. – V. 58. – P. 29–59; P. 127–149.
77. Erdös P., Renui A. *On random entire functions*// Zastosowania Mat. – 1969. – V.10. – P. 47–55.
78. Filevych P.V. *On the Wiman–Valiron type estimates for entire functions*// Doklady of the National Academy of Sciences of Ukraine. — 1997. — V.12. — P. 141–148. (in Ukrainian)
79. Filevych P.V. *Relations between the maximal term and the maximal modulus for entire functions defined by Dirichlet series*// Mat. Stud. – 1997. – V.7, No. 2. – P. 157–166. (in Ukrainian)

80. Kuryliak A. *Subnormal independent random variables and Levy's phenomenon for entire functions*, Mat. Stud. – 2017. – V.47, no.1. – P. 10–19.
81. Kuryliak A.O., Ovchar I.E., Skaskiv O.B. *Wiman's inequality for Laplace integrals*, Int. Journal of Math. Analysis. – 2014. – V.8, no.8. – P. 381–385.
82. Скасків О.Б., Бандура А.І. Асимптотичні оцінки додатних інтегралів і цілих функцій. Львів–Івано-Франківськ: ЛНУ-ІНФТУНГ. 2015. 108 с.

Стаття: надійшла до редколегії 10.02.2025
прийнята до друку 13.10.2025

SURVEY OF THE RESULTS OF THE WIMAN-VALIRON THEORY OVER THE LAST 50 YEARS. I: THE WIMAN INEQUALITY AND BOREL RELATION FOR ENTIRE FUNCTIONS OF ONE VARIABLE

Oleh SKASKIV[1], Andriy BANDURA[2], Andriy KURYLIAK[3]

[1,3]*Ivan Franko National University of Lviv,*
1 Universytetska Str.,79000, Lviv
[2]*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas*
Ivano-Frankivsk, Ukraine
e-mails: olskask@gmail.com, andriykopanytsia@gmail.com, andriykuryliak@gmail.com

The article is devoted to a survey of results from the Wiman-Valiron theory in the class of entire and analytic functions of the form $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, concerning such relations

$$\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r), \quad \Psi(\ln M_f(r)) \sim \Psi(\ln \mu_f(r)),$$

as well as the Wiman-type inequalities $M_f(r) \leqslant \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/2}$, which hold for all $r \geqslant r_0$ outside some exceptional sets; here $M_f(r)$ and $\mu_f(r)$ are the maximum modulus of f on the circle $\{z\colon |z| = r\}$ and the maximal term of the Taylor series, respectively. Some statements concerning generalizations of these results to classes of entire Dirichlet series of the form

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n \exp\{z\lambda_n\}, \quad 0 = \lambda_0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \uparrow +\infty \ (1 \leqslant n \uparrow +\infty),$$

are also described. Analogs of similar results are given in the class of functions $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ of the form $F(x) = \int_0^{+\infty} f(u)e^{xu}\nu(du)$, where ν is a non-negative measure on $\mathbb{R}_+$ with unbounded support $\operatorname{supp}\nu$, $f(x)$ is an arbitrary non-negative ν-measurable function on $\mathbb{R}_+$.

Key words: entire function, analytic function, Wiman-Valiron theory, Dirichlet series, Lebesgue-Stieltjes integral.